UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

Carlo Felice Manara

Grandezze, Misure, Proporzionalità

QUADERNO n. 30/1993

Dipartimento di Matematica "F. Enriques"
Via C. Saldini, 50. 20133, Milano, Italia.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

Carlo Felice Manara

Grandezze, Misure, Proporzionalità

QUADERNO n. 30/1993

Dipartimento di Matematica "F. Enriques"
Via C. Saldini, 50. 20133, Milano, Italia.

Abstract

Elementary introduction of concept "magnitude" (Italian: "grandezza"; German: "Grösse"; French: "grandeur"); some didactical reflections are given.

1991 *Mathematics Subject Classification*

Primary: 28A75, 28A, 28

Secondary: 51-01

Key words and phrases:
Magnitudes - Quantities - Measures - Ratio

INTRODUZIONE

"On peut avoir trois principaux objets
"dans l'étude de la vérité: l'un, de
"la découvrir quand on la cherche;
"l'autre de la démontrer quand on la
"possède; le dernier de la discerner
"d'avec le faux quand on l'examine."

(Blaise Pascal. De l'esprit géométrique)

1 Le pagine che seguono sono dedicate ai Colleghi della scuola dell'obbligo, i quali hanno il compito di iniziare la formazione degli alunni alla mentalità della matematica, alla costruzione dei concetti fondamentali di questa scienza ed all'impiego dei suoi simboli.

E' noto che il primo concetto matematico che il giovane in età preadolescenziale incontra durante la sua carriera scolastica è quello di numero naturale; subito dopo egli incontra il concetto di grandezza, e deve impadronirsi degli strumenti matematici per dominarlo ed utilizzarlo.

Infatti le convenzioni del sistema metrico decimale ed i calcoli con le frazioni fanno parte delle conoscenze quasi obbligate di chi vive nella nostra società. Questi concetti e soprattutto gli strumenti simbolici che si utilizzano ed i calcoli relativi possono presentare qualche difficoltà a certe intelligenze che non gradiscono il simbolismo della matematica e non si trovano a loro agio nell'impiego dei linguaggi convenzionali e simbolizzati. Pertanto l'insegnamento di questi capitoli della matematica elementare può porre dei problemi didattici talvolta non facili.

2 - Il nostro intento non è stato quello di presentare delle soluzioni valide per tutti i problemi didattici che si possono presentare, e meno ancora di dare delle "ricette" miracolistiche, o di insegnare delle strategie didattiche di esito sicuro in ogni caso. Noi pensiamo infatti che ogni operatore della scuola debba assumersi la responsabilità della costruzione di un proprio itinerario didattico, fondato sulla conoscenza della materia e sulla propria sensibilità ed esperienza.

Noi infatti abbiamo qualche fondato dubbio sul fatto che tali espedienti esistano; e il nostro dubbio riguarda soprattutto la validità di tanta manualistica corrente e diffusa, ricca di illustrazioni, di espedienti e di trovate, ma spesso anche di cose inutili o di concetti presentati senza il dovuto rilievo, in mezzo alla massa di illustrazioni e di sussidi didattici.

3 - Nella esposizione che segue abbiamo scelto di trattare il concetto di grandezza a partire dalla esperienza elementare , costruendo via via su questa gli strumenti concettuali per la trattazione rigorosa del concetto stesso dal punto di vista della matematica. Ciò non significa ovviamente che la struttura logica della trattazione possa essere trasferita nella pratica dell'insegnamento; anzi in questa occorrerà trattare molte delle proprietà qui considerate come certe, sulla base della evidenza sperimentale, dalla quale si parte per la costruzione teorica. Ciò è del resto avvenuto nello sviluppo storico della matematica: infatti soltanto coll'analisi dei fondamenti iniziata nel secolo scorso si è sentita la necessità di prendere esplicita coscienza delle basi su cui si costruisce l'edificio della matematica, anche di quella elementare. Tuttavia pensiamo che l'insegnante debba conoscere quali siano i problemi logici ed epistemologici che si nascondono spesso dietro alle apparenze di una evidenza che può infondere una fallace sicurezza.

4 - La strada che abbiamo scelto di percorrere è diversa da quella battuta da certe correnti didattiche, che prescrivono la presentazione di concetti generalissimi e per questo molto astratti, e la costruzione di grandi sistemi concettuali dentro i quali si dovrebbero calare i dati della esperienza quotidiana. A nostro avviso questa impostazione è frutto di un equivoco, che induce a pensare che le idee molto generali siano di facile apprendimento, proprio in virtù della estrema semplicità e generalità.

Noi pensiamo invece che una visione razionale del mondo che ci circonda debba essere costruita gradualmente sulla esperienza quotidiana della realtà, la quale è poliedrica e composita. In questo modo le strutture formali astratte vengono presentate soltanto nel momento in cui la mole del materiale di esperienza da dominare rende evidente la loro utilità e la loro potenza; si eviterebbe così il pericolo che l'insegnamento diventi un puro addestramento all'impiego di certi strumenti linguistici e all'adozione di certe procedure che sono imposti dal di fuori. Invece, a nostro parere, l'apprendimento dovrebbe diventare appropriazione di concetti e di strumenti, tale da formare patrimonio culturale, non soggetto ad oblio, del cittadino.

Milano, gennaio 1992.

I - GENERALITA'. PROBLEMI LOGICI E DIDATTICI.

1 - La matematica chiave di lettura della realtà.

Si sente spesso parlare e capita di leggere, delle espressioni come "matematizzazione della realtà"; noi preferiremmo parlare di "matematica come chiave di lettura della realtà", e con questo modo di esprimerci vorremmo mettere in luce il fatto che la matematica può essere considerata come una scienza che fornisce concetti e strumenti espressivi per rappresentare la realtà che è oggetto delle nostre osservazioni e dei nostri esperimenti, per esprimere le leggi che la reggono e quindi, in generale, per conoscerla meglio.

Nel corso di questo nostro lavoro cercheremo di precisare il significato dei termini come "rappresentare" ed "esprimere". Per ora ci limitiamo ad osservare che queste azioni sono da noi compiute quotidianamente mediante il linguaggio, del quale ci serviamo appunto per rappresentare la realtà e per comunicare con gli altri esseri umani.

Pertanto, da un certo punto di vista, il significato e lo scopo dell'insegnamento della matematica sono analoghi a quelli dell'insegnamento delle lingue, ed in particolare della lingua materna di ogni discente. In questo ordine di idee quindi l'insegnamento della matematica presenta difficoltà e vantaggi analoghi a quelli del linguaggio in generale; in particolare si cerca di far riflettere il discente sulle regole che reggono l'impiego delle parole, per raggiungere il massimo possibile di chiarezza e di efficacia, e per arricchire anche se stessi di idee nuove, che nascono dalla precisazione e dal dominio degli strumenti di espressione.

A questo proposito si può osservare che presso molte lingue esistono vocaboli per indicare dei concetti numerici; anzi, presso molte lingue esistono due serie di termini per rappresentare certi concetti collegati con i numeri che vengono chiamati "naturali": precisamente presso molti linguaggi esistono dei termini numerali detti "cardinali" (come uno, due, tre ecc.) ed altri detti "ordinali" (come primo, secondo, terzo ecc.).

Presso altre lingue esistono addirittura dei termini per indicare concetti quantitativi legati ad una coppia: per esempio i casi "duali" del greco antico. Queste osservazioni, a nostro parere, indicano che il concetto di numero naturale fa parte della elaborazione di esperienze del tutto elementari, comuni ad ogni essere razionale, e trova delle espressioni in certo senso naturali anche nel linguaggio comune.

Tuttavia il liguaggio matematico possiede anche delle caratteristiche peculiari, che da una parte giustificano la sua utilità e la sua efficacia nel campo della conoscenza razionale, e d'altra parte spiegano anche le difficoltà che alcuni soggetti incontrano nell'apprendimento e nell'impiego di questo linguaggio; difficoltà che sono incontrate anche da soggetti intellettualmente ben dotati, ma in certo senso allergici a certe procedure tipiche della matematica.

Nei prossimi paragrafi rifletteremo su queste peculiarità, il che ci permetterà di inquadrare meglio il nostro lavoro dedicato alla precisazione del concetto di grandezze e di quelli ad esso collegati.

* * *

2 - Il linguaggio della matematica.

Abbiamo osservato che i mezzi espressivi dei concetti fondamentali della matematica fanno parte del patrimonio comune delle lingue naturali. Tuttavia nella evoluzione della mente infantile si incontra presto un divario ed una differenziazione tra i mezzi espressivi del linguaggio comune e quelli della matematica. Divario che ha la sua origine nelle caratteristiche del linguaggio matematico, le quali sono a loro volta spiegate dalle necessità e dagli scopi che questo linguaggio tende a conseguire.

Cercheremo ora di identificare gli aspetti che pensiamo caratteristici del linguaggio matematico, aspetti che (come abbiamo già detto) gli conferiscono una particolare efficacia nell'impiego scientifico, ma anche costituiscono una peculiare difficoltà per certi soggetti, e quindi presentano interessanti problemi didattici.

Un primo aspetto caratteristico del linguaggio matematico è costituito dal fatto che esso impiega in larga misura dei simboli convenzionali.

A questo proposito si potrebbe osservare che - in certo senso - anche ogni linguaggio possiede in certa misura degli aspetti convenzionali. Per esempio Dante fa dire ad Adamo (Paradiso, canto XXVI, 130 et sqq.):

> Opera naturale è ch'uom favella
> ma così o così natura lascia
> poi fare a voi, secondo che v'abbella.

Questo pensiero che potrebbe essere esposto dicendo che il fatto naturale della espressione linguistica, comune a tutti gli esseri umani, si realizza poi in tanti modi diversi, in dipendenza delle disposizioni e delle scelte.

Tuttavia si potrebbe dire che il linguaggio della matematica presenta in modo spiccatissimo questo aspetto di convenzionalità, che pure è in qualche modo comune a tutti i linguaggi. Se consideriamo per esempio il modo in cui in ogni paese civile vengono oggi rappresentati i numeri naturali, ci accorgiamo che questa rappresentazione è fondata su certe convenzioni che non sono affatto necessarie e naturali per quanto esse a noi appaiano tali per la lunga abitudine.

Tali convenzioni sono per esempio la scelta della base 10 per la numerazione, la scelta di certi simboli particolari per rappresentare i primi 9 numeri naturali, l'introduzione dello zero tra i numeri, la ben nota convenzione posizionale per la rappresentazione dei numeri.

E' noto che per esempio i Greci ed i Romani non utilizzavano il concetto di zero. Inoltre la numerazione romana si serviva di convenzioni del tutto diverse delle nostre per rappresentare certi numeri e per dare un valore ai simboli, in dipendenza dalla loro posizione. E' noto infatti che i Romani si servivano di certi simboli: I, V, X, L, C, D, M per rappresentare i numeri che noi chiamiamo rispettivamente : uno, cinque, dieci, cinquanta, cento, cinquecento, mille. Inoltre essi rispettavano certe regole per utilizzare i simboli elementari, regole che si potrebbero legittimamente chiamare di "sintassi", nel senso etimologico originale della parola, che indica appunto l'ordine della disposizione delle parole (ed in generale dei simboli) per comunicare correttamente il pensiero. Così l'accostamento di simboli elementari indicava la somma oppure la differenza dei numeri rappresentati dai simboli stessi, salvando tuttavia certe regole che dovevano essere rispettate perchè una successione di simboli rappresentasse un numero.

Così per esempio il numero che noi oggi rappresentiamo col simbolo "99" non poteva essere rappresentato col simbolo "IC" (ossia come 100-1), ma doveva essere rappresentato col simbolo "XCIX" [ossia come (100-10)+(10-1)].

Come è noto, le nostre convenzioni rappresentano ogni numero come una somma di prodotti di potenze del 10 (cioè del numero scelto come base della numerazione) per i primi nove numeri e per lo zero; così per esempio il simbolo "456" rappresenta convenzionalmente il numero che si ottiene dalla somma:

$$4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 6.$$

E' noto che le nostre convenzioni permettono non soltanto di rappresentare chiaramente e comodamente dei numeri interi comunque grandi, ma anche permettono di formulare delle regole efficaci e comode per rappresentare ed eseguire le operazioni sui numeri. Come vedremo, questo fatto è di importanza fondamentale per l'impiego della matematica nella rappresentazione e nella conoscenza della realtà materiale, perchè permette di rappresentare con i simboli numerici le leggi della realtà e dei fenomeni energetici che ci circondano, e quindi permette di conoscere tale realtà e di dominarla quando ciò sia utile.

Dalle caratteristiche del linguaggio matematico sulle quali abbiamo finora riflettuto consegue anche una ulteriore caratteristica, che talvolta mette a disagio alcune intelligenze: per descrivere tale caratteristica ricordiamo che ogni linguaggio naturale possiede una qualità che viene chiamata "ridondanza"; questa potrebbe essere descritta dicendo che in ogni messaggio che noi comunichiamo mediante il linguaggio naturale ci sono abitualmente più simboli di quelli che sarebbero strettamente necessari per comunicare l'informazione desiderata; il che permette, tra l'altro, di correggere gli eventuali errori di comunicazione, e di completare quest'ultima con informazioni marginali, delle quali spesso colui che parla o scrive non è completamente conscio. Non possiamo qui soffermarci nella analisi di questo fenomeno, che - come abbiamo detto - è comune a tutti i linguaggi naturali; osserviamo soltanto che il linguaggio artificiale della matematica è privo di ridondanza; consegue di qui che la mancanza o l'alterazione di un solo simbolo, e il mancato rispetto di una sola regola di sintassi, deformano o addirittura sopprimono il senso di un messaggio.

Ciò rende il linguaggio matematico particolarmente adatto alle comunicazioni della scienza, che richiedono precisione ed univocità, ma accresce le difficoltà per certi intelletti, ponendo anche spesso dei notevoli problemi di didattica. D'altra parte anche questo aspetto del linguaggio e della mentalità della matematica presenta degli aspetti profondamente formativi per l'intelligenza giovanile, la quale deve essere formata ed avviata alla chiarezza delle idee ed alla precisione e nettezza della espressione.

Osserviamo infine che, nel linguaggio comune e naturale, quasi sempre il significato di un termine è precisato dal contesto in cui il termine viene inserito; tale contesto può essere una singola frase, oppure un periodo, un insieme di periodi; addirittura l'intera opera di un Autore, il quale utilizza il termine considerato con una sfumatura di significato del tutto personale. Questa circostanza, tipica dei linguaggi naturali, è tuttavia abbastanza scomoda quando si voglia utilizzare un simbolismo linguistico nella pratica della scienza. Infatti, come abbiamo detto, questa richiede che i mezzi espressivi siano precisi ed univoci. Pertanto nella matematica si cerca di utilizzare dei simboli che abbiano dei signficati precisi e costanti; soprattutto dei simboli il cui significato non dipenda dal contesto in cui essi sono inseriti.

OSSERVAZIONE 1 - Come vedremo, non ci si può illudere sulla possibilità di costruire un linguaggio scientifico totalmente indipendente dal contesto e dal linguaggio comune: occorre infatti far ricorso a quest'ultimo per spiegare il significato dei simboli convenzionali che via via si inventano e si introducono. Tuttavia si cerca di far sì che il linguaggio comune sia, per così dire, imbrigliato e confinato in modo che il significato di un simbolo sia costante, una volta che esso sia stato spiegato col linguaggio comune. E soprattutto si cerca di far sì che il significato di un simbolo non cambi con il contesto nel quale è inserito.

* * *

3 - Dai numeri naturali ai razionali.

Abbiamo già accennato alla cadenza temporale con la quale i giovani entrano in contatto con i concetti della matematica: il primo incontro con questa scienza avviene con la presa di possesso dei concetti relativi ai numeri naturali, alle operazioni corrispondenti ed al simbolismo che ci serve per esprimere questo insieme di nozioni.

Il concetto di numero naturale viene acquisito, come è noto, dalla osservazione delle proprietà degli insiemi finiti e delle operazioni su di essi. E' facile osservare che in questo primo stadio di apprendimento il giovane non soltanto impara a costruire dei concetti astratti ed a simbolizzarli, ma verifica la possibilità di dominare i risultati delle nostre manipolazioni sul reale attraverso l'uso dei simboli: infatti per esempio l'operazione di somma di due interi naturali gli permette di prevedere il risultato della operazione concreta di riunione di due insiemi finiti.

Pertanto l'apprendimento e l'impiego delle prime nozioni di aritmetica conduce il giovane al primo stadio di matematizzazione della realtà; ed intendiamo con questa espressione indicare l'operazione mentale che si realizza con l'astrazione, la simbolizzazione e l'impiego dei simboli per la deduzione.

Il secondo incontro del giovane alunno delle scuole elementari con la matematica avviene nel momento in cui egli viene avviato alla conoscenza del sistema metrico decimale e delle sue convenzioni; in questo stadio la simbolizzazione della realtà materiale tangibile e sensibile richiede dei mezzi concettuali più complicati e sofisticati di quelli che bastano per rappresentare gli insiemi finiti; infatti la schematizzazione della realtà materiale che si consegue in questo secondo stadio ha come oggetto le grandezze e come strumento l'operazione di misura, che rappresenta e codifica la realtà mediante i numeri razionali e reali.

Il lavoro presente è appunto dedicato ad offrire agli insegnanti un itinerario concettuale per impostare l'opera didattica rivolta a chiarire agli alunni i concetti fondamentali di questo secondo stadio di matematizzazione della realtà.

Provvisoriamente potremmo descrivere le difficoltà ulteriori che il discente incontra osservando che negli insiemi finiti gli elementi (oggetti concreti o astratti ma, comunque, determinati) sono di fatto distinti tra loro e distinguibili con operazioni concrete (per esempio con il conteggio effettivo) o con atti di pensiero determinati. Invece quando si passi a considerare le grandezze, che sono oggetto di misure, il momento della codificazione matematica richiede che si identifichino in ogni grandezza delle parti che sono soltanto potenzialmente contenute in un tutto, il quale viene immaginato indefinitamente divisibile. Ciò richiede la costruzione e l'impiego di tutta una nuova serie di strumenti concettuali e simbolici, strumenti che vengono abitualmente chiamati "frazioni" e più precisamente dovrebbero essere chiamati "numeri razionali".

Come abbiamo già detto, gli sviluppi che seguono sono dedicati agli insegnanti ma non intendono costituire un itinerario didattico, la cui stesura e la cui realizzazione lasciamo interamente alla competenza ed alla esperienza degli operatori della scuola; pensiamo tuttavia che sia utile riflettere sui fondamenti sperimentali e sui problemi logici che si presentano nella costruzione di una teoria rigorosa e coerente. Infatti nella trattatistica corrente si incontrano spesso delle impostazioni che lasciano a desiderare tanto dal punto di vista del rigore che da quello della efficacia didattica. Noi pensiamo invece che abbia ragione il grande matematico italiano G. Peano, il quale ha dichiarato che la matematica è bella perché è semplice, e che il rigore matematico consiste semplicemente nel dire soltanto delle cose vere.

Ma questa semplicità e questo rigore si conseguono soltanto con una conoscenza approfondita degli argomenti che si vogliono insegnare; conoscenza che aiuta a non dire cose inutili, ed a presentare soltanto gli elementi veramente importanti di ogni teoria.

* * *

4 - Il concetto di "grandezza".

Il termine "grandezza" fa parte del vocabolario abitualmente utilizzato nel linguaggio comune; come ogni termine del linguaggio naturale, esso può prendere vari significati, in dipendenza del contesto in cui esso è inserito. Per esempio il "Novissimo dizionario della lingua italiana" di Ferdinando Palazzi (cfr. [17]) alla voce "Grandezza" elenca 19 termini: lunghezza, larghezza, altezza, dimensione, misura, capacità, ampiezza, vastità, eccesso, gravezza, esorbitanza, eccellenza, sublimità, magnanimità, liberalità, magnificenza, generosità, grandigia, fasto.

Soltanto alcuni tra i termini precedenti sono sinonimi; per tutti il significato esatto deve essere precisato facendo riferimento al contesto.

Quindi, per l'impiego del termine in una scienza come la matematica è necessario precisare il suo significato. Come è noto, l'operazione con la quale si presenta il significato di un termine linguistico o di un simbolo viene chiamata abitualmente "definizione" del termine stesso.

La questione del significato e della portata di questa operazione è dibattuta da secoli: essa infatti è strettamente collegata con la questione del significato e della portata della nostra conoscenza, e delle procedure con le quali noi giungiamo ad essa, la formuliamo e la comunichiamo agli altri. Non intendiamo affrontare tale questione in questa sede, ma ci limitiamo ad osservare che, quale che sia la teoria che si vuole costruire e la conoscenza che si vuole acquisire, occorre in ogni caso dare per noti i significati di certi termini, dei quali ci si servirà poi per definire rigorosamente il significato degli altri. Ciò è stato osservato da molti filosofi; ci limitiamo a riportare ciò che ha scritto il grande matematico, filosofo, teologo Blaise Pascal, nel secolo XVII:

"...questo metodo <di definire il significato di ogni termine che si impiega> sarebbe bello, ma è assolutamente impossibile: perché è evidente che i primi termini che si vorrebbero definire ne supporrebbero degli altri precedenti, che dovrebbero servire a spiegarli, ed in modo analogo le prime proposizioni che si vogliono dimostrare ne supporrebbero altre precedenti; e così è chiaro che non si giungerebbe mai alle prime. Così, spingendo avanti sempre di più le ricerche si giungerebbe a certe parole primitive che non si possono più definire, ed a dei principi primitivi così chiari che non si possono trovarne degli altri più chiari, che possano servire per la loro dimostrazione ."[18] .(*)

Secondo l'atteggiamento della critica moderna dei fondamenti, la precisazione del significato dei termini primitivi viene dato con una procedura che viene chiamata "definizione implicita" o anche "definizione per postulati (o per assiomi)" o infine "definizione d'uso"; per esempio, seguendo questa procedura, G. Peano, nella sua celebre memoria sui fondamenti dell'aritmetica [19] , per definire il concetto di numero naturale non scrive una frase del tipo : "Il numero è ....[e poi una frase che vorrebbe essere una definizione]", ma inizia direttamente il suo discorso parlando del numero, cioè usando il concetto : egli enuncia così cinque proposizioni iniziali, che riguardano il numero ed altri concetti, da lui scelti come primitivi; concetti che vengono così definiti implicitamente da queste proposizioni, le quali stabiliscono, per così dire, le regole d'impiego dei concetti considerati.

Analogamente D. Hilbert , nella sua opera sui fondamenti della Geometria, non inizia il suo discorso con una frase del tipo "Il punto è...", come si incontra negli "Elementi" di Euclide; egli invece scrive all'inizio: "Pensiamo tre sistemi di enti; quelli del primo sistema verranno chiamati

(*) ....cette méthode serait belle, mais elle est absolument impossible; car il est évident que les premiers termes qu'on voudrait définir en supposeraient des précédents pour servir à leur explication, et que de même les premières propositions qu'on voudrait prouver en supposeraient d'autres qui les précédassent; et ainsi il est clair qu'on n'arriverait jamais aux premières. Ainsi, en poussant les recherches de plus en plus , on arrive nécessairement à des mots primitifs qu'on ne peut plus définir, et à des principes si clairs qu'on n'en trouve plus qui le soient davantage pour servir à leur preuve.

"punti"...quelli del secondo sistema verranno chiamati "rette"...quelli del terzo sistema verranno chiamati "piani" ".[12]. Hilbert prosegue enunciando delle proposizioni primitive (che egli chiama "Assiomi"), e che forniscono la definizione implicita dei concetti presentati.

Per quanto riguarda il concetto di grandezza, che è fondamentale per la matematizzazione della realtà, capita di leggere o di ascoltare spesso certe frasi che vorrebbero essere delle definizioni esplicite di questo concetto.

Una delle più frequenti suona :

" Grandezza è tutto ciò che è suscettibile di aumento e diminuzione", frase che è stata scritta dal grande matematico del secolo XVIII Leonardo Eulero (**).

Noi adottiamo qui l'atteggiamento di cui abbiamo già detto, e daremo una definizione implicita del concetto di grandezza, mediante certi postulati che abbiamo scelto con certi criteri di cui diremo.

Prima di esporli ricordiamo che i concetti primitivi, che si definiscono implicitamente con assiomi, e gli assiomi stessi non sono imposti dalla realtà che si vuole rappresentare, ma possono essere scelti con una certa libertà, pur rispettando certe esigenze di coerenza logica, sulle quali ritorneremo.

OSSERVAZIONE 2 - Nel seguito impiegheremo i due termini "assioma" e "postulato" come completamente sinonimi. Ciò è risultato di una nostra scelta, la quale tuttavia può essere giustificata dall'uso della nostra lingua. Infatti il "Novissimo dizionario della lingua italiana" di F.Palazzi [17], alla voce "assioma" porta:

"verità evidente di per sé stessa , che è universalmente accettata senza dimostrazione. Massima, proposizione, aforismo, principio, domma."

E lo stesso dizionario, alla voce "postulato" porta:

"proposizione che viene ammessa come vera senza dimostrazione, stante la sua evidenza e chiarezza; verità fondamentale, di carattere assiomatico. Assioma, domma."

Osserviamo tuttavia che Euclide, nel suo trattato degli "Elementi" [11] fa distinzione tra le proposizioni che vengono presentate come vere in forza soltanto del loro contenuto, e quelle proposizioni che egli chiama "Postulati". La critica storica ha giustificato questa scelta di nomi diversi per le proposizioni come originata dall'atteggiamento del grande matematico greco, che non intende imporre il contenuto dei postulati, ma semplicemente intende richiedere un assenso a ciò che egli dice; questo secondo atteggiamento potrebbe essere quindi dettato da spirito di critica e di lodevole modestia intellettuale.

(**) Erstlich wird alles dasjenige eine Grösse genennt, welches einer Vermehrung oder einer Verminderung fähig ist.

Noi qui scegliamo di considerare i due termini "postulato" ed "assioma" come sinonimi, e di dare ad essi il significato di proposizioni che non vengono dimostrate; tuttavia non pretendiamo che questa mancata dimostrazione sia dovuta alla loro intrinseca evidenza: semplicemente essa dipende dal fatto che la loro validità non può essere ricondotta alle proposizioni che sono state enunciate precedentemente. Non si esclude quindi che, in un'altra sistemazione teorica, una proposizione che qui viene presentata come assioma possa essere dimostrata in base alle precedenti, e quindi diventare un teorema di quella particolare teoria, e viceversa. Un caso tipico di questa situazione è costituito da quella che verrà chiamata nel prossimo capitolo "Proposizione di Archimede". E' noto che in molte esposizioni essa viene enumerata tra i postulati; qui invece, le proposizioni enunciate in precedenza sono sufficienti per dimostrarla (si veda in proposito [22]).

* * *

5 - Il problema logico della definizione.

Secondo la posizione metodologica più moderna noi quindi preciseremo il concetto di grandezza e il significato del termine con un insieme di assiomi, che ne danno la definizione implicita.

Come abbiamo detto, tali assiomi sono frutto di una scelta, che abbiamo fatto con i seguenti criteri: a nostro parere il concetto di grandezza è uno dei primi che i giovani incontrano nella loro carriera scolastica; pertanto riteniamo giusto che un itinerario scolastico tenga conto delle esperienze elementari che ognuno incontra, nella vita pratica e nella manipolazione quotidiana della realtà materiale.

Ripetiamo qui che la scelta degli assiomi è libera, ma deve sottostare a certe regole, imposte dalla logica e dalla coerenza.

La principale di queste regole è la garanzia della assenza di contradditorietà nel sistema di assiomi che si costruisce; la seconda è la ricerca di un sistema di proposizioni che siano indipendenti logicamente. Infatti, se così non fosse, verrebbe introdotta come assioma, cioè senza dimostrazione, una proposizione che tale non è, perché può essere dimostrata. La procedura che si segue abitualmente per garantire queste due circostanze, necessarie per il rigore della trattazione, consiste nell'esibire dei modelli del sistema di assiomi, cioè un insieme di enti, presi dalla realtà materiale o anche da altri capitoli della scienza, che siano tali da realizzare gli assiomi enunciati.

Ritorneremo su queste questioni in seguito, dopo aver enunciato il sistema di assiomi che ci interessa. Qui aggiungiamo al già detto alcune osservazioni che riguardano la definizione delle singole grandezze di cui ci occuperemo. A questo proposito anticipiamo qui che non daremo delle definizioni esplicite delle grandezze di cui tratteremo, ma ci limiteremo a richiamare le esperienze elementari dalle quali nascono i corrispondenti concetti.

Così quando mettiamo due oggetti sui due piatti di una bilancia simmetrica, ed osserviamo che la bilancia sta in equilibrio, diciamo che i due oggetti hanno "pesi uguali" o anche addirittura che "hanno lo stesso peso". Analogamente, se supponiamo di sapere che cosa si intenda dire parlando di "trasporto rigido", se due segmenti rettilinei si possono portare a sovrapporsi mediante una cosiffatta operazione, si suol dire che essi hanno "lunghezze uguali" o anche addirittura che hanno "la stessa lunghezza"; ancora, se due figure poligonali possono essere decomposte in un numero finito di parti, in modo che le singole parti siano sovrapponibili con un trasporto rigido, si suol dire che le due figure poligonali "hanno aree uguali" o anche addirittura che hanno "la stessa area". Ancora, se due automobili compiono lo stesso percorso in tempi uguali, si suol dire che le auto hanno tenuto velocità uguali, o addirittura hanno tenuto "la stessa velocità" durante il percorso.

In altre parole noi non definiremo esplicitamente il peso, la lunghezza, l'area, la velocità, ma ci limiteremo a precisare che cosa si intenda esprimere parlando di pesi, lunghezze, aree, velocità uguali.

La procedura che conduce a definire in questo modo dei concetti astratti, comuni a certe classi di oggetti sui quali operiamo, è stata chiamata "definizione per astrazione".

Un classico esempio di definizione per astrazione si incontra nel libro V degli "Elementi" di Euclide; ivi il matematico greco tratta delle proporzioni tra grandezze; egli non definisce il rapporto tra coppie di grandezze omogenee, ma si limita a precisare che cosa si intenda dire parlando di uguaglianza di rapporti tra due coppie di grandezze. Ritorneremo sulla questione nel Capitolo V.

OSSERVAZIONE 3 - La procedura che conduce alla definizione per astrazione dei concetti della matematica è stata criticata da qualche Autore: per esempio C. Burali Forti [4] critica la definizione che G. Cantor dà del concetto di numero cardinale; la frase del Cantor, riportata dal Burali Forti , è la seguente:

" Potenza o numero cardinale di M chiamiamo quella idea generale che per mezzo della nostra attiva facoltà di pensare si deduce dall'insieme M, facendo astrazione dai suoi diversi elementi e dall'ordine con cui vengono dati."

In altre parole, G. Cantor presenta il numero cardinale degli elementi di un insieme M come quel concetto astratto che è comune all'insieme stesso ed a tutti quelli che possono essere posti in corrispondenza biunivoca con lui.

La proposta del Burali Forti è di sostituire le definizioni per astrazione con altre procedure logiche. Non intendiamo approfondire qui la questione, che ha dei risvolti filosofici sui quali non intendiamo soffermarci. Nella presente trattazione cercheremo di partire dalla realtà materiale, che si osserva quotidianamente, per costruire delle classi di equivalenza di figure geometriche o di oggetti; su questi suggerimenti della esperienza cercheremo di costruire un concetto astratto di grandezza che possa rendere, abbastanza adeguatamente, la realtà da cui siamo partiti.

* * *

II - ASSIOMATICA ELEMENTARE DEL CONCETTO DI GRANDEZZA.

1 - La relazione di equivalenza.

Indicheremo con G una classe di grandezze omogenee; gli elementi di questa saranno indicati con lettere maiuscole dell'alfabeto latino, come A, B, C,...X, Y, Z ecc. Con il simbolo "AX" seguito da un numero romano indicheremo un assioma.

AX I - Esiste un predicato biargomentale (relazione) definito sull'insieme delle coppie ordinate di elementi di G (quadrato cartesiano dell'insieme G); il sussistere di questa relazione tra due elementi X, Y di G verrà indicato con il simbolo:

(1) $$E(X,Y).$$

Per la relazione indicata con "E" sono valide le proprietà espresse dalle formule seguenti:

(2) $E(X,X)$ (proprietà riflessiva)

(3) da $E(X,Z)$ ed $E(Y,Z)$ segue $E(X,Y)$ (proprietà transitiva)

Teorema 1 - Dalle (2) e (3) si dimostra che vale la:

(4) da $E(X,Y)$ segue $E(Y,X)$ e viceversa (proprietà simmetrica).

CONVENZIONE - Nel seguito il sussistere della relazione "E" tra due elementi X,Y di G sarà indicato interponendo il segno "=" tra i nomi dei due elementi; pertanto le tre proprietà della relazione "E" saranno espresse nella forma abituale:

(2a) $X = X$ (proprietà riflessiva)
(3a) da $X=Z$ ed $Y=Z$ segue $X=Y$ (proprietà transitiva)
(4a) da $X=Y$ segue $Y=X$ e viceversa (proprietà simmetrica).

La relazione indicata con "E" verrà chiamata nel seguito "relazione di equivalenza". Questo termine ha un significato generico, ma può essere precisato di volta in volta a seconda delle varie classi di enti della realtà che vogliamo descrivere, inquadrare e conoscere con il concetto di grandezza. Per esempio, se si tratta della lunghezza dei segmenti rettilinei, la verifica del sussistere della relazione può essere ottenuta con il trasporto rigido, qualora si sia dato senso a questa espressione nella trattazione geometrica. Se si tratta di pesi, la verifica del sussistere della relazione può essere ottenuta con l'impiego di uno strumento che viene abitualmente chiamato "bilancia"; se si tratta di aree di figure piane a contorno poligonale la verifica del sussistere della relazione può essere eseguita decomponendo le figure in parti poligonali congruenti, e così via, con operazioni che possono essere di volta in volta diverse, ma che mirano in ogni caso ad accertare il sussistere di una relazione che abbia le tre proprietà ricordate.

Come è noto, presso alcuni autori una relazione che abbia le tre proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva viene chiamata "relazione equaliforme".

Il fatto che tra due grandezze X ed Y dell'insieme G non sussiste la relazione indicata con il simbolo "=" verrà nel seguito espresso con la formula convenzionale :

(5) $X \neq Y.$

OSSERVAZIONE 1 - Alcuni Autori introducono una distinzione delle classi di grandezze della geometria, parlando di grandezze di prima, di seconda e di terza specie. Queste distinzioni non si riferiscono al concetto di grandezza che tratteremo, ma semplicemente alle tecniche ed alle operazioni con le quali si può verificare il sussistere della relazione equaliforme che si considera. Precisamente vengono chiamate "grandezze di prima specie " quelle grandezze per le quali la verifica del sussistere della relazione può essere conseguita con una unica operazione ben determinata. Per esempio, nel caso dei segmenti, la verifica della uguaglianza delle lunghezze si consegue con un'unica operazione di trasporto rigido. Vengono chiamate "grandezze di seconda specie" quelle per le quali la verifica richiede un numero finito di operazioni: si considerino per esempio due figure piane a contorno poligonale non intrecciato; queste possono non essere sovrapponibili con un'unica operazione, cioè possono non essere tra loro congruenti, come alcuni Autori usano dire. Tuttavia esse possono avere aree uguali; infatti esse possono venir decomposte in un numero finito di figure a due a due sovrapponibili con un movimento rigido, cioè a due a due congruenti. Infine vengono chiamate "grandezze di terza specie quelle per le quali la verifica del sussistere della relazione di equivalenza non può essere ottenuta con un numero finito di operazioni. Tali sono per esempio le figure piane a contorno curvilineo, per esempio il cerchio. La verifica del fatto che il cerchio ha area uguale a quella del triangolo che ha come base la circonferenza rettificata e come altezza il raggio non può essere ottenuta con un numero finito di operazioni elementari, del tipo di quelle descritte finora. Un caso analogo si verifica per alcune coppie di poliedri: è stato infatti dimostrato che per esempio il cubo ed il tetraedro regolare che hanno volumi uguali non possono essere decomposti in un numero finito di parti poliedrali a due a due congruenti (Si veda in proposito [1]).

E' chiaro che queste distinzioni, pur essendo efficaci e forse anche utili per la didattica, non hanno alcuna influenza sulla trattazione che noi stiamo facendo del concetto elementare di grandezza.

* * *

2 - L'operazione di somma e le sue proprietà.

AX II - Esiste nell'insieme G una operazione di composizione interna, la quale associa ad ogni coppia ordinata di elementi di G un terzo elemento di G. L'elemento che questa operazione associa alla coppia ordinata X, Y sarà indicato con il simbolo:

(6) $S(X,Y).$

L'operazione "S" possiede le seguenti proprietà:

(7) $S(X,Y) = S(Y,X)$ (proprietà commutativa)

(8) $S[S(X,Y),Z] = S[X,S(Y,Z)]$ (proprietà associativa)

Inoltre esiste in G un elemento, che sarà chiamato "grandezza nulla", ed indicato con il simbolo "O" , che è elemento neutro per l'operazione S; si ha cioè:

(9) $S(X,O) = X.$

Nel seguito l'operazione finora indicata con "S" verrà chiamata "somma" ed indicata interponendo il segno "+" tra i simboli delle due grandezze sulle quali si opera; così le (7), (8), (9) verranno tradotte con questo simbolismo con le formule:

(7a) $X+Y = Y+X;$

(8a) $(X+Y)+Z = X+(Y+Z);$

(9a) $X+O = X.$

OSSERVAZIONE 2 - Già si conosce una operazione di somma tra numeri naturali; quella che noi introduciamo qui è ovviamente diversa, e perciò l'abbiamo in origine indicata con un simbolo diverso da quello con cui si indica abitualmente la somma tra numeri; l'adozione del simbolismo che è abituale per la somma tra numeri è giustificata dal fatto che le proprietà formali delle due operazioni sono identiche : per esempio la validità delle (7a), (8a), (9a) sussiste tanto se X, Y, Z, O rappresentano grandezze che se gli stessi simboli rappresentano numeri naturali. Quindi l'adozione di un medesimo simbolo nei due casi non origina confusione; anzi può essere di aiuto nel rilevare il parallelismo tra certe procedure mentali e l'analogia che intercede tra certi concetti che, a prima vista, appaiono molto distanti tra loro.

Vale la :

(10) da $X+Z = Y+Z$ segue $X = Y$ (legge di cancellazione).

OSSERVAZIONE 3 - Non è necessario enunciare come assioma che:

$$\text{da } X=Y \quad \text{segue} \quad X+Z=Y+Z.$$

Infatti il simbolo "+Z" può essere considerato come il simbolo di un operatore a destra sulle grandezze; pertanto si accetta che operando con un dato operatore su grandezze equivalenti si ottengano grandezze equivalenti.

AX III - Esistono in G delle grandezze diverse dalla grandezza nulla.

Da ciò che precede si trae il

Teorema 2 - La grandezza nulla è unica.

Infatti se esistesse una grandezza O' per la quale vale la:

(11) $O' + X = X = X + O,$

dalla legge di cancellazione si trarrebbe:

(12) $O' = O.$

* * *

3 - Grandezze assolute e divisibili.

AX IV - Se si ha:

(13) $X+Y = O$ allora è $X = O;$

e per la legge di cancellazione (10) si ha anche $Y = O$.

Questo assioma fa assumere alle grandezze dell'insieme G la proprietà di "grandezze assolute".

AX V - Una qualunque grandezza diversa dalla grandezza nulla è sempre esprimibile come somma di altre due, entrambe non nulle.

In formule si ha :

(14) Da $X\neq O$ segue che esistono almeno due grandezze Y e Z tali che sia : $X = Y+Z$ ed anche si abbia $Y\neq O$ e $Z\neq O$.

Questo assioma potrebbe essere chiamato "assioma di divisibilità". In forma suggestiva esso infatti potrebbe essere enunciato dicendo che ogni grandezza non nulla è sempre divisibile nella somma di almeno altre due. E poichè la stessa proprietà vale ovviamente per ciascuna delle due, si deduce che ogni grandezza è indefinitamente divisibile, cioè che l'operazione di divisione non ammette un ultimo stadio.

OSSERVAZIONE 4 - Si noti che questa proprietà non vale per gli oggetti materiali che noi manipoliamo quotidianamente o sui quali eseguiamo degli esperimenti fisici.

Infatti la fisica e la chimica mettono in evidenza la esistenza di parti elementari della materia.

Pertanto si può dire che la teoria che stiamo sviluppando non ci dà tutta la verità sugli oggetti che la Natura offre al nostro studio; tuttavia la stessa teoria è adeguata per dominare molte proprietà di questi oggetti in modo comodo e razionale; in particolare la teoria ci offre la possibilità di dominare razionalmente le proprietà macroscopiche della materia; e quindi di dominare le conseguenze di molte operazioni che noi eseguiamo.

OSSERVAZIONE 5 - Da ciò che precede si deduce l'esistenza di infinite grandezze nell'insieme G; proprietà che consegue dagli AX III e V.

* * *

4 - Ordinamento nell'insieme di grandezze omogenee.

Se vale la relazione:

(15) $$X+Z = Y$$

scriveremo:

(16) $$X \le Y.$$

Pertanto il simbolo "≤" scritto tra i simboli di due grandezze indica una relazione tra le due, relazione della quale daremo qui le proporietà più importanti.

Teorema 3 - Se è:

(17) $X \le Y$ ed anche $Y \le X$ allora è $X = Y$.

La dimostrazione si ottiene immediatamente dalla legge di cancellazione e dalla definizione della relazione "≤".

Teorema 4 - Se è:

(18) $X \le Y$ ed anche $Y \le Z$ si ha $X \le Z$ (proprietà transitiva).

La dimostrazione si trae dalla definizione della relazione "≤" e dalla legge di cancellazione.

Se vale la (16) si conviene anche di scrivere:

(19) $$Y \ge X.$$

Inoltre se vale la (16) ed è anche

(20) $$X \neq Y,$$

si suole anche scrivere:

(21) $$X < Y ;$$

e questa relazione viene anche considerata equivalente alla:

(22) $$Y > X.$$

La relazione (21) potrà essere letta dicendo che " X è minore di Y", e la (22) potrà essere letta dicendo che "Y è maggiore di X".

Per queste relazioni valgono le seguenti proprietà, oltre alla (18):

(23) da $X \le Y$ e $Y < Z$ segue $X < Z$
da $X < Y$ e $Y \le Z$ segue $X < Z$
da $X < Y$ e $Y < Z$ segue $X < Z$.

AX VI - Date due grandezze qualunque X, Y almeno una delle due relazioni seguenti è valida:

(24) $X \le Y$ oppure $Y \le X$.

Teorema 5 - Date due grandezze qualisivogliano X ed Y, è valida una ed una sola delle tre relazioni seguenti:

(25) $X < Y$ oppure $X = Y$ oppure $X > Y$.

La dimostrazione segue dalla definizione della relazione "$\leq$", e dall'AX VI.

Teorema 6 - Si ha:

(26) da $X \leq Y$ segue $(X+Z) \leq (Y+Z)$ ed viceversa.

La dimostrazione segue dalla definizione della relazione "$\leq$" e dalla legge di cancellazione.

OSSERVAZIONE 6 - L'AX VI stabilisce un ordinamento totale nell'insieme G; in conseguenza di questo fatto due grandezze dell'insieme sono sempre confrontabili rispetto alla relazione "$\leq$".

Si ha poi ovviamente:

$$O \leq X.$$

* * *

5 - Differenza tra due grandezze.

Se vale la relazione (16), e quindi la (15), si suole scrivere:

(27) $$Z = Y-X.$$

La grandezza Z che figura nella (27) viene anche chiamata, secondo l'uso, "differenza" tra Y ed X.

Teorema 7 - Sussiste la:

(28) $$X+(Y-X) = Y.$$

OSSERVAZIONE 7 - Si dimostra, sempre in base alla legge di cancellazione, che la differenza di due grandezze, quando esiste, è unica.

La esistenza della differenza tra due grandezze è condizionata al sussistere della relazione (16).

* * *

6 - La continuità.

Da ciò che precede si trae che se in G esiste una grandezza diversa dalla grandezza nulla, non esiste alcuna grandezza M che sia maggiore di ogni altra grandezza . Si suole esprimere questo fatto dicendo che la classe G "non è superiormente limitata".

Sia ora Σ un insieme di grandezze di G; diremo che Σ "è superiormente limitato" se esiste (almeno) una grandezza A di G che è maggiore di ogni grandezza di Σ. Per la proprietà transitiva della relazione di ordine che sussiste in G, anche ogni grandezza maggiore di A è maggiore di ogni grandezza di Σ.

Diremo che l'insieme Σ è "completo" se, quando contiene una grandezza X, contiene anche ogni altra grandezza che sia minore di X.

E' evidente che se un insieme Σ superiormente limitato non è completo, si può sempre costruirne un altro, univocamente determinato dal primo, che è completo: a tal fine è sufficiente inserire nell'insieme ogni grandezza che sia minore anche di una sola grandezza A dell'insieme Σ. Pertanto nel seguito ogni insieme superiormente limitato che sarà preso in considerazione sarà supposto completo.

Sia Σ un insieme superiormente limitato e completo di grandezze di G. Diremo che una grandezza S è "estremo superiore" di Σ se valgono le due proposizioni seguenti:

I) nessuna grandezza di Σ è maggiore di S;
II) se A è una grandezza tale che sia:

$$A<S, \tag{29}$$

esiste in Σ una grandezza X tale che si abbia:

$$A<X. \tag{30}$$

Teorema 8 - Un insieme Σ superiormente limitato e completo non può avere due diversi estremi superiori S e S'.

Infatti se non è $S'=S$, dal teorema 5 si ha che deve essere certamente vera una ed una sola delle due relazioni:

$$S'<S \quad \text{oppure} \quad S'>S. \tag{31}$$

Supponiamo che sia vera la prima; allora per la proprietà II) enunciata poco fa, esiste qualche elemento di Σ che è maggiore di S';quindi S' non può essere estremo superiore di Σ.

Analoga argomentazione, con la scambio di S e S', vale nel caso in cui sia vera la seconda delle relazioni (31).

AX VII - Ogni insieme Σ superiormente limitato e completo di grandezze di G ha un estremo superiore.

OSSERVAZIONE 8 - Questo assioma enuncia una proprietà dell'insieme G di grandezze che viene chiamata "continuità". Pertanto le grandezze definite dal sistema di assiomi che abbiamo enunciato vengono qualificate come "assolute" e "continue". L'importanza dell'assioma di continuità verrà messa in evidenza dagli sviluppi che seguiranno.

* * *

7 - Il multiplo di una grandezza secondo un numero naturale.

Nelle pagine che seguono indicheremo con lettere minuscole dell'alfabeto latino, come n, m, p, q, r ecc. dei numeri naturali; il numero zero sarà indicato con il simbolo abituale "0".

L'operazione di somma può essere eseguita su più di due grandezze, come si dimostra facilmente; si giunge così immediatamente al concetto di somma con n addendi tutti uguali ad una medesima grandezza X. Tale operazione viene chiamata "prodotto del numero naturale n per la grandezza X", e viene talvolta indicata con simboli del tipo seguente:

$$(32) \qquad n\cdot X = \underbrace{X+X+.......+X}_{n \text{ volte.}}$$

La stessa operazione può essere definita con una procedura che viene chiamata "ricorsiva" nel modo seguente:

$$(33) \qquad 0\cdot X = 0$$
$$(n+1)\cdot X = n\cdot X + X.$$

La grandezza $n\cdot X$ viene chiamata "multiplo" di X secondo l'intero n; si suole porre, per definizione:

$$(34) \qquad X\cdot n = n\cdot X.$$

OSSERVAZIONE 9 - La definizione di "prodotto di un numero naturale per una grandezza" può essere vista in modo da introdurre gli sviluppi del prossimo capitolo, e quindi in modo da aprire la strada ad un ampliamento del concetto di matematizzazione della realtà, di cui abbiamo detto nel Cap. I.

Precisamente nella (32) si può interpretare il numero naturale n come un "operatore" sulle grandezze; cioè come il simbolo di una operazione ben definita, che, eseguita su una grandezza, ne produce un'altra ben determinata con una legge precisa.

In questa luce si potrebbero anche vedere i termini che, in varie lingue, indicano i prodotti di una grandezza per certi numeri naturali piccoli: anche in italiano infatti si parla del doppio, del triplo, del quadruplo ecc. di una data grandezza, come di grandezze che si ottengono da una data con una certa operazione: raddoppiamento, triplicamento ecc.

A partire dalla definizione data con le (33), si dimostrano per l'operazione di prodotto di un numero per una grandezza vari teoremi, che traducono fondamentali proprietà dell'operazione.

Si hanno anzitutto le proprietà espresse dalle formule seguenti:

$$(35) \qquad 1\cdot X = X$$
$$(n+m)\cdot X = n\cdot X + m\cdot X$$
$$n\cdot(X+Y) = n\cdot X + n\cdot Y$$
$$n\cdot(m\cdot X) = (n\cdot m)\cdot X.$$

Si possono inoltre dimostrare le proprietà seguenti:

(36) $n\cdot 0 = 0.$

(37) da $X \neq 0$ e $n \neq 0$ segue $n\cdot X \neq 0.$

(38) da $X = Y$ segue $n\cdot X = n\cdot Y.$

(39) se $X \leq Y$ e $n \neq 0$ segue $n\cdot X \leq n\cdot Y.$

(40) da $X \neq 0$ e $n<m$ segue $n\cdot X < m\cdot Y.$

(41) da $n\cdot X = n\cdot Y$ e $n\cdot Y \neq 0$ segue $X = Y.$

OSSERVAZIONE 10 - Per brevità di esposizione non riportiamo qui le dimostrazioni di tutte le formule precedenti, tanto più perché qualche dimostrazione è del tutto elementare. Ci limiteremo quindi a dimostrare alcune delle formule, perché esse vengono dimostrate, in base alla definizione (33), facendo ricorso al metodo di induzione matematica, metodo che è fondato su una proprietà fondamentale dei numeri naturali, e che costituisce uno strumento indispensabile per l'aritmetica razionale.

In Appendice di questo paragrafo daremo alcuni cenni sull'induzione nell'insieme dei numeri naturali. Qui diamo qualche esempio dell'impiego del metodo per la dimostrazione di qualcuna tra le proprietà enunciate.

Esempio 1 - Si consideri la seconda delle (35), e precisamente la :

(42) $$(n+m)\cdot X = n\cdot X + m\cdot X.$$

La sua dimostrazione può essere ottenuta per induzione rispetto ad m, con la procedura seguente:

I) anzitutto la (42) è vera per m=0; e ciò in forza della proprietà nota dei numeri naturali, per la quale si ha :

$$n+0 = n;$$

e per la prima delle (33) e per le proprietà della grandezza nulla.

Supponiamo allora che la (42) sia vera per un valore di m, e dimostriamola per m+1. Dimostriamo cioè che vale la :

(43) $$[n+(m+1)]\cdot X = n\cdot X + (m+1)\cdot X.$$

Osserviamo ora che, per la proprietà associativa dell'addizione dei numeri naturali, si ha:

$$n+(m+1) = (n+m)+1;$$

quindi il primo membro della (43) può essere scritto nella forma:

$$[(n+m)+1]\cdot X,$$

ed, applicando la seconda delle (33) si ha quindi:

(44) $$[n+(m+1)]\cdot X = [(n+m)+1]\cdot X = (n+m)\cdot X + X;$$

ma, per la (42), che è stata supposta valida, e per la seconda delle (33), si ha:

(45) $$(n+m)\cdot X + X = n\cdot X + m\cdot X + X = n\cdot X + (m+1)\cdot X.$$

Quindi dal primo membro della (43) si passa all'ultimo delle (45) con una catena di uguaglianze; il che dimostra il teorema.

APPENDICE - La dimostrazione per induzione in aritmetica si fonda su una proposizione che ha suscitato molte analisi e discussioni. G.Peano, nella sua fondamentale memoria sui principi dell'aritmetica [19], la enuncia tra gli assiomi che definiscono implicitamente il numero naturale; egli quindi la considera come costitutiva del concetto di numero naturale, e la utilizza metodicamente per dimostrare rigorosamente le proprietà di questo concetto.

Tale proposizione potrebbe essere enunciata nel modo seguente:

Se una proprietà dei numeri naturali è valida per lo zero; e se, nell'ipotesi che essa sia valida per un numero n, essa viene dimostrata per il numero (n+1), essa vale per ogni numero naturale.

* * *

8 - Esistenza di grandezze comunque piccole.

Siano dati una grandezza qualunque A, diversa dalla grandezza nulla, ed un numero naturale n, diverso da zero. Sussiste il

Teorema 9 - Esiste una grandezza X tale che si abbia:

(46) $$n \cdot X < A.$$

Per la dimostrazione ricordiamo che, per l'AX V, esistono almeno due grandezze non nulle Y e Z, tali che si possa scrivere:

(47) $$A = Y+Z.$$

Per l'AX VI deve essere vera almeno una delle due relazioni:

(48) $$Y \leq Z \qquad\qquad Z \leq Y.$$

Supponiamo ora di aver scelto i nomi delle due grandezze in modo che valga la prima delle (48); allora dalla (26) segue:

(49) $$Y + Y = 2 \cdot Y \leq Y + Z = A.$$

Chiamiamo X(1) questa grandezza Y; avremo quindi:

(50) $$2 \cdot X(1) \leq A;$$

possiamo ora pensare di ripetere sulla grandezza X(1) lo stesso ragionamento; otterremo così una grandezza X(2) tale che sia:

(51) $$2 \cdot X(2) \leq X(1);$$

dalle (18) e (39) si ha allora:

(52) $$2^2 \cdot X(2) \leq A.$$

Ripetendo m volte il procedimento, si giunge a stabilire l'esistenza di una grandezza X(m) tale che valga la :

(53) $$[2\hat{}m] \cdot X(m) \leq A.$$

Ora, fissato n, esiste almeno un m tale che sia:

(54) $$n < 2\hat{}m;$$

quindi, per la (40), si ha:

(55) $$n \cdot X(m) < A.$$

OSSERVAZIONE 11 - Il contenuto di questo teorema potrebbe essere esposto in forma suggestiva dicendo che, dagli assiomi enunciati, si deduce la esistenza di grandezze "comunque piccole". A questo proposito ricordiamo ciò che abbiamo esposto nella Oss. 4 a proposito della divisibilità: questi risultati non si applicano in pieno alla materia, come essa ci è presentata dalla fisica moderna. Tuttavia la teoria che stiamo costruendo è adeguata per rendere molti aspetti della materia e quindi per dominarne anche molte proprietà macroscopiche.

* * *

9 - La proposizione di Archimede.

Teorema 10 - Data una grandezza A, diversa dalla grandezza nulla, ed una grandezza X tale che sia:

(56) $$X < A,$$

esiste almeno un numero naturale n tale che sia:

(57) $$n \cdot X > A.$$

La dimostrazione si consegue per assurdo: supponiamo che esista almeno una grandezza Y, diversa dalla grandezza nulla, tale che nessun suo multiplo sia maggiore di A. Consideriamo l'insieme Σ delle grandezze che hanno la stessa proprietà della grandezza Y; l'insieme Σ è superiormente limitato e sia S il suo estremo superiore, esistente per l'AX VII. Per l'AX V esistono almeno due grandezze U,V tali che si abbia:

(58) $$U+V = S.$$

Per l'AX VI deve sussistere almeno una delle due relazioni:

(59) $$U \leq V \quad \text{oppure} \quad V \leq U.$$

Supponiamo di aver dato i nomi alle grandezze in modo che valga la prima delle (59). Si ha ovviamente:

(60) $$V < S,$$

e quindi la grandezza V appartiene alla classe Σ. Ma per la (59) si ha:

(61) $$S \leq 2 \cdot V.$$

Certamente si ha allora:

(62) $$S < 3 \cdot V.$$

Poniamo:

(63) $$W = 3 \cdot V;$$

questa grandezza, in forza della (62), non appartiene alla classe Σ; esiste quindi un intero naturale m tale che si abbia:

(64) $$m \cdot W > A.$$

Allora per la (63) e per la (35) si ha :

(65) $$(3 \cdot m) \cdot V > A;$$

ma questa relazione è contraddittoria con la affermazione fatta poco fa, secondo la quale V appartiene alla classe Σ, e quindi non dovrebbe esistere alcun numero naturale che soddisfi alla (65).

OSSERVAZIONE 12 - Il teorema ora dimostrato viene chiamato talvolta "Proposizione di Archimede"; essa si incontra già negli Elementi di Euclide [11] ed è stata enunciata esplicitamente anche da Archimede. Nella nostra trattazione la proposizione viene dimostrata in forza degli assiomi enunciati; in altre trattazioni la proposizione viene presentata come postulato, perchè gli assiomi enunciati in precedenza non sono sufficienti per la sua dimostrazione.

La critica dei fondamenti del secolo XIX ha messo in evidenza il ruolo importante di questa proposizione nella costruzione della geometria elementare; in particolare si sono costruiti dei sistemi di proposizioni di geometria non-archimedea, cioè dei sistemi geometrici costruiti in modo che in essi non sia valida la proposizione di Archimede.

* * *

10 - Questioni critiche.

Come abbiamo detto ripetutamente, la scelta delle proposizioni iniziali di una teoria astratta è libera, e rispecchia gli scopi, la cultura ed i gusti del trattatista. Tuttavia questa scelta non può essere arbitraria o cervellotica, perché deve rispettare delle regole logiche ben determinate: tali regole possono essere enunciate parlando di compatibilità e di indipendenza.

La compatibilità richiede che l'insieme delle proposizioni iniziali sia coerente nel suo complesso: in altre parole, nessuna proposizione deve contraddire l'insieme di tutte le altre. La indipendenza richiede che nessuna proposizione possa essere dedotta dalle altre: altrimenti dovrebbe essere inserita tra i teoremi.

La procedura che garantisce il sussistere di queste due qualità fondamentali è stata oggetto di lunghe analisi e di discussioni tra filosofi, logici e matematici. Non intendiamo addentrarci qui in queste discussioni, e ci limitiamo a ricordare che la procedura che noi seguiremo consiste nell'esibire dei modelli, cioè dei sistemi di enti, presi dalla realtà, i quali ubbidiscano agli assiomi e quindi permettano di verificare, nei fatti, che il sistema delle proposizioni non contiene contraddizioni.

Osserviamo anche che la realtà che fornisce i contenuti delle proposizioni iniziali può essere presa in senso molto lato: in altre parole i contenuti possono essere presi anche da altri rami della matematica; purchè, beninteso, la compatibilità di questi rami sia garantita già per altra via.

Noi esibiremo dei modelli di questo tipo, prendendoli dall'Algebra o dalla Geometria; osserviamo inoltre che se un modello realizza un certo numero di assiomi, che sono i primi, nell'ordine in cui li abbiamo presentati, e non quelli enunciati successivamente, con ciò stesso resta confermata la compatibilità dei primi e la indipendenza degli altri (Si veda in proposito [14]).

I contenuti degli assiomi, che realizzano la verifica di cui si parla, potrebbero essere i seguenti:

L'AX I sarà qui considerato come fondamentale, ed accettato senza ulteriore analisi.

L'algebra fornisce molti esempi di sistemi con leggi di composizione interna non commutative (per esempio gruppi) o commutative e non associative. E ciò permette di verificare che AX II è indipendente da AX I. Per quanto riguarda l'esistenza dell'elemento neutro per l'operazione di somma: l'insieme dei numeri naturali, senza lo zero, avendo come operazione di composizione interna la somma abituale, soddisfa a tutti gli assiomi precedenti, ma non ha elemento neutro.

Per quanto riguarda l'AX III, è chiaro che l'insieme costituito dal solo zero, avendo come operazione la somma, soddisfa a tutti gli assiomi precedenti al III, ma ovviamente non a questo.

Consideriamo l'insieme dei numeri naturali; sia "≡" la relazione di congruenza rispetto ad un modulo non primo e l'operazione di composizione sia il prodotto; l'elemento neutro è allora la classe dei numeri che hanno resto 1 rispetto al modulo. La legge di cancellazione non vale. Per esempio si ha :

$$3 \cdot 2 \equiv 3 \cdot 4 \qquad (\text{mod.}6)$$

ma non è

$$2 \equiv 4 \qquad (\text{mod.}6).$$

Quindi la legge di cancellazione non segue dagli assiomi che la precedono.

Per quanto riguarda l'AX IV, sia G l'insieme delle mantisse razionali, cioè dei numeri razionali identificati a meno di interi; l'operazione di composizione interna sia la somma. In questo insieme esistono delle coppie di elementi che hanno per somma lo zero dell'insieme (cioè un numero intero).

Per quanto riguarda l'AX V , sia G l'insieme dei naturali; in esso non vale l'assioma ricordato, perchè il numero 1 non può essere espresso come somma di due numeri entrambi diversi da zero.

Per quanto riguarda l'AX VI, si consideri l'insieme G costituito da un sottoinsieme dei vettori di un piano, definito nel modo seguente: a G appartiene il vettore nullo [0,0] ed ogni vettore [x,y] avente entrambe le componenti strettamente positive. L'operazione di somma sia quella definita abitualmente per i vettori. In questo insieme sono soddisfatti tutti gli assiomi precedenti il VI; ma esistono coppie di vettori che non sono confrontabili rispetto alla relazione "≤" definita nel paragrafo 4.

Infine per quanto riguarda l'AX VII, prendiamo come G l'insieme dei razionali assoluti; allora si dimostra che l'assioma di continuità, nella forma da noi data, non vale, perchè in questo insieme esistono degli insiemi completi e superiormente limitati che non hanno un estremo superiore razionale.

* * *

III - I NUMERI RAZIONALI.

1 - Sottomultipli di una grandezza secondo un numero naturale.

Teorema 1 - Data una grandezza A ed un numero naturale n, diverso da zero, esiste una grandezza X tale che sia:

$$n \cdot X = A. \tag{1}$$

Se si ha $A = 0$ il numero è lo zero, come risulta dalla (33) del Cap. precedente. Supponiamo che la grandezza A sia diversa dalla grandezza nulla.

In forza del teorema 9 del Cap. precedente esistono delle grandezze Y per le quali si ha:

$$n \cdot Y < A; \tag{2}$$

d'altra parte esistono anche delle grandezze per le quali la (2) non è valida. Consideriamo la classe Σ delle grandezze Z per le quali vale la relazione:

$$n \cdot Z \leq A. \tag{3}$$

In forza della (2) la classe Σ non è vuota, e d'altra parte essa è superiormente limitata. Sia S il suo estremo superiore. Si dimostra che la grandezza X che soddisfa alla condizione (1) è data da:

$$X = S. \tag{4}$$

Ricordando il Teorema 5 del Cap. precedente, dimostreremo che vale la (4) facendo vedere che non può essere:

$$n \cdot S < A \qquad \text{nè} \qquad n \cdot S > A. \tag{5}$$

Supponiamo infatti che sia valida la prima delle (5). Poniamo allora:

$$D = A - n \cdot S; \tag{6}$$

il Teorema 9 del Cap. precedente garantisce che esiste almeno una grandezza U tale che si abbia:

$$n \cdot U < D. \tag{7}$$

Allora si avrà:

$$n \cdot (S+U) < A; \tag{8}$$

ma questa relazione non può sussistere, stante l'ipotesi che S è l'estremo superiore delle grandezze per cui vale la (3).

Supponiamo ora che valga la seconda delle (5). Poniamo:

$$D = n \cdot S - A, \tag{9}$$

ed ancora sia U una grandezza tale che valga la (7).

Dalla (9) segue:

$$A + D = nS, \tag{10}$$

e quindi, per la (7):

$$A + n \cdot U < nS, \tag{11}$$

ossia:

(12) $$A < n\cdot(S-U).$$

Ma anche questa relazione non può essere vera, perché la grandezza S-U è certamente minore di S, e dunque appartiene alla classe delle grandezze per le quali vale la (3).

La grandezza X che soddisfa alla (1) viene indicata con uno dei seguenti simboli:

(13) $$X = (1/n)\cdot A \qquad \text{oppure} \qquad X = A/n,$$

e chiamata "sottomultiplo di A secondo n" o anche "un n-esimo di A".

OSSERVAZIONE 1 - La dimostrazione della esistenza della grandezza X che soddisfa alla (1) e che quindi possa essere indicata con il simbolo (13), è stata conseguita facendo ricorso all'AX VII. Tale esistenza è fondamentale per gli sviluppi che seguono. Osserviamo tuttavia che il Teorema ora dimostrato accerta soltanto la esistenza della soluzione della (1), ma non fornisce indicazioni per la sua costruzione effettiva. Per esempio, in geometria elementare, si può costruire con strumenti elementari (riga e compasso) il segmento la cui lunghezza sia 1/n di un segmento dato, ma per altre grandezze (per esempio l'ampiezza degli angoli) non esiste costruzione, eseguibile con strumenti elementari, che possa condurre allo scopo. Come vedremo, il matematico Eudosso, il quale fu (secondo gli storici) il creatore della teoria delle proporzioni che possiamo leggere negli Elementi di Euclide, sviluppa questa teoria senza far ricorso ai sottomultipli delle grandezze, ma soltanto ai multipli. Per quanto riguarda l'applicabilità di queste teorie agli enti materiali ed agli oggetti studiati dalla Fisica, rimandiamo alle Osservazioni 4 ed 11 del Cap. precedente.

Teorema 2 - Si ha :

(14) $$(1/n)\cdot(m\cdot A) = m\cdot[(1/n)\cdot A].$$

Per la dimostrazione, poniamo:

(15) $$(1/n)\cdot[m\cdot A] = V,$$

in modo tale che si abbia, per definizione:

(16) $$n\cdot V = m\cdot A.$$

Poniamo anche:

(17) $$(1/n)\cdot A = U,$$

in modo tale che si abbia, per definizione:

(18) $$A = n\cdot U.$$

Sostituendo nella (16):

(19) $$n\cdot V = m\cdot(n\cdot U) = (m\cdot n)\cdot U = n\cdot(m\cdot U),$$

e, per la (41) del Cap. precedente:

(20) $$V = m\cdot U.$$

* * *

2 - Le frazioni ed i numeri razionali.

La grandezza:

$$(21) \qquad (1/n)\cdot[m\cdot A] = m\cdot[(1/n)\cdot A]$$

verrà nel seguito indicata con il simbolo convenzionale:

$$(22) \qquad m\cdot A/n \quad \text{oppure} \quad (m/n)\cdot A$$

da leggersi "m n-esimi di A".

Teorema 3 - Indicato con k un numero naturale qualunque, si ha :

$$(23) \qquad (m\cdot k)\cdot A/(n\cdot k) = m\cdot A/n.$$

per la dimostrazione poniamo:

$$(24) \qquad U = [1/(k\cdot n)]\cdot A;$$

ed anche :

$$(25) \qquad A = (k\cdot n)\cdot U \quad , \quad k\cdot U = (1/n)\cdot A.$$

Di qui si ha :

$$(26) \qquad m\cdot[(1/n)\cdot A] = m\cdot(k\cdot U) = (m\cdot k)\cdot U = (m\cdot k)\cdot\{[1/(n\cdot k)]\cdot A\}.$$

OSSERVAZIONE 2 - Il simbolo "m/n" ed anche quello che si ottiene scrivendo i due numeri m, n uno sopra l'altro, separati da un trattino orizzontale, viene chiamato abitualmente "frazione" ed i numeri m ed n ricevono i nomi tradizionali di "numeratore" e di "denominatore" della frazione stessa ed entrambi vengono detti "termini" della frazione. Noi abbiamo presentato qui la frazione come un operatore su grandezze, operatore che rappresenta una generalizzazione del numero naturale, presentato sotto questo aspetto nella Osservazione 9 del Capitolo precedente.

Il Teorema 3 consente di stabilire una relazione di equivalenza tra frazioni; chiameremo equivalenti due frazioni quando, considerate come operatori ed applicate, come operatori, ad una grandezza qualsiasi A, producono la medesima grandezza. Scriveremo quindi:

$$(27) \qquad m/n = (m\cdot k)/(n\cdot k).$$

Si ottiene così la definizione per astrazione di un nuovo concetto, quello di "numero razionale". Chiameremo così un operatore tra grandezze, che può essere rappresentato da una qualunque tra le infinite frazioni che sono equivalenti in forza della definizione (27).

OSSERVAZIONE 3 - Il fatto che il concetto introdotto nelle righe precedenti sia chiamato "numero" (anche se con l'apposizione di un aggettivo) merita di essere giustificato. Infatti noi conosciamo già degli enti che chiamiamo "numeri", e che sono caratterizzati dal possesso di certe proprietà fondamentali, e dal fatto che su di essi possiamo operare con certe operazioni (somma, prodotto ecc.) che pure hanno certe proprietà.

Occorre pertanto giustificare il nome che si dà a questi nuovi enti, mostrando che essi posseggono, almeno in parte, le proprietà possedute da quegli enti che finora erano stati esclusivamente chiamati numeri.

Sarà così giustificato ciò che diremo nel seguito, affermando che l'insieme dei numeri razionali costituisce un "ampliamento" dell'insieme dei numeri naturali.

Stabiliremo anzitutto una relazione di ordine nell'insieme dei numeri razionali, ponendo per definizione:

(28) $m/n \leq p/q$ se è $(m/n)\cdot A \leq (p/q)\cdot A$ e viceversa. Si verifica facilmente che per la relazione "$\leq$" ora definita valgono le proprietà fondamentali, stabilite nel paragrafo 4 del Cap. precedente per la relazione "$\leq$" tra grandezze. Inoltre si ha che vale la (28) allora e allora soltanto che è:

(29) $$m\cdot q \leq n\cdot p.$$

* * *

3 - Prodotto di due numeri razionali.

Si dimostra che si ha:

(30) $$(m/n)\cdot[(p/q)\cdot A] = [(m\cdot p)/(n\cdot q)]\cdot A.$$

Sulla base di questa dimostrazione si può definire l'operazione di moltiplicazione di due numeri razionali nel modo seguente:

(31) $$(m/n)\cdot(p/q) = (m\cdot p)/(n\cdot q);$$

si verifica che questa operazione di moltiplicazione, così definita, possiede le proprietà formali fondamentali (commutativa ed associativa) dell'operazione di moltiplicazione tra numeri naturali.

Il risultato dell'operazione di moltiplicazione di due numeri razionali viene abitualmente chiamato "prodotto" dei due numeri, e questi vengono chiamati "fattori" del prodotto. Tuttavia è invalso l'uso di chiamare anche "prodotto" tanto l'operazione che il suo risultato.

In forza della definizione e del Teorema 3, l'elemento neutro del prodotto è costituito dal numero razionale rappresentato da una frazione del tipo k/k.

Pertanto nel seguito, per comodità, si scriverà anche semplicemente:

(32) $$k/k = 1.$$

Questa definizione di prodotto permette anche di definire il reciproco di un numero razionale qualsiasi m/n (quando sia $n=/=0$), come quel numero che, moltiplicato per m/n, dà 1; si avrà quindi:

(33) $$1/(m/n) = n/m.$$

Da questa definizione si trae poi la definizione della operazione inversa della moltiplicazione, operazione che si può chiamare "divisione" di un numero razionale per un altro, ed indicare nei modi tradizionali:

(34) $$(m/n):(p/q) = (m\cdot q)/(n\cdot p).$$

* * *

4 - Somma di due numeri razionali.

Si definisce addizione di due numeri razionali m/n e p/q l'operazione che ha come risultato un numero razionale r/s il quale, considerato come operatore su una qualunque grandezza A, produce la grandezza somma delle due $(m/n)\cdot A$ e $(p/q)\cdot A$; quindi si avrà, per definizione:

(35) $$(r/s)\cdot A = (m/n)\cdot A + (p/q)\cdot A.$$

Il razionale r/s , risultato della operazione di addizione, viene chiamato "somma" dei due razionali m/n e p/q e questi vengono chiamati "addendi". Tuttavia è invalso l'uso di chiamare "somma" tanto il risultato che l'operazione.

La determinazione del razionale r/s che verifica la (35) viene fatta costruendolo come un operatore che fornisce un multiplo del sottomultiplo comune delle due grandezze $(m/n)\cdot A$ e $(p/q)\cdot A$. Un sottomultiplo comune cosiffatto è ovviamente $[1/(n\cdot q)]\cdot A$, e di conseguenza l'espressione del razionale somma dei due considerati è:

(36) $$m/n+p/q = [m\cdot q + n\cdot p]/(n\cdot q).$$

Si verifica che l'elemento neutro della operazione di addizione è il razionale $0/k$, k essendo un numero naturale diverso dallo zero. Non si conferisce alcun significato al simbolo $0/0$.

OSSERVAZIONE 4 - Si verifica che, per l'operazione di addizione ora definita, valgono le proprietà possedute dall'operazione di addizione tra numeri naturali: commutativa e associativa; si verifica pure che vale la proprietà distributiva dell'operazione di moltiplicazione rispetto a quella di somma.

In particolare si verifica che esiste un sottoinsieme speciale di razionali: esso è costituito dai numeri del tipo "$(k\cdot n)/k$", essendo k un numero naturale diverso dallo zero. Eseguendo le operazioni di addizione e di moltiplicazione su questi razionali, secondo le definizioni date, si ottengono ancora dei razionali dello stesso tipo. Si può far corrispondere al razionale $(k\cdot n)/k$ il numero naturale n, e così facendo si ottiene una corrispondenza che associa ad ogni numero del sottoinsieme speciale un razionale ed al risultato delle operazioni sui numeri naturali il risultato delle operazioni sui razionali corrispondenti. Una corrispondenza di questo tipo viene abitualmente chiamata "omomorfismo". Pertanto, con questa nomenclatura, le osservazioni fatte possono essere esposte dicendo che sussiste un omomorfismo tra l'insieme dei numeri naturali ed un sottoinsieme dei razionali. Si completa così ciò che è stato detto sopra, in occasione della Osservazione 3.

OSSERVAZIONE 5 - Nelle formule che abbiamo scritto finora abbiamo introdotto molte parentesi di vario tipo, per mettere chiaramente in evidenza, senza alcun equivoco, l'ordine delle operazioni che si eseguono sulle grandezze e sui numeri naturali. Tuttavia, nella pratica dei calcoli, si omettono molte parentesi, perchè non vi sono abitualmente dubbi sulla loro esecuzione .

OSSERVAZIONE 6 - Abbiamo presentato il numero razionale come un operatore rappresentabile in infiniti modi con frazioni equivalenti: su questa osservazione sono fondate molte regole di calcolo con le frazioni, e così pure molte procedure che vengono insegnate a questo proposito. Una di queste conduce alla costruzione di un rappresentante tipico della classe di frazioni che rappresentano tutte un medesimo numero razionale. Tale procedura conduce a costruire una frazione che viene ottenuta dividendo entrambi i termini per tutti i fattori comuni.

Osserviamo qui esplicitamente che questi modi di presentare i numeri razionali non sono i soli possibili: nella pratica dei calcoli numerici si ricorre all'impiego di particolari frazioni, che sono legate alle convenzioni, ormai generalmente adottate, per la rappresentazione dei numeri naturali. I particolari di queste procedure di rappresentazione e di calcolo saranno trattati diffusamente nel prossimo Capitolo.

* * *

5 - Il razionale come rapporto tra due grandezze.

Qualora si abbia:

(37) $$A = (m/n)\cdot B,$$

si suol dire che il razionale m/n è il "rapporto" tra le due grandezze A e B, e si suole anche scrivere :

(38) $$A/B = m/n.$$

Da tutto ciò che precede si trae anche che la relazione (38) è equivalente alla:

(39) $$n\cdot A = m\cdot B,$$

ed anche alla:

(40) $$(1/m)\cdot A = (1/n)\cdot B.$$

In altri termini, il sussistere della (37) tra le due grandezza A e B è equivalente alla esistenza di un multiplo comune ad entrambe,ed anche di un sottomultiplo comune ad entrambe.

* * *

IV - I NUMERI REALI ASSOLUTI.

1 - Coppie di grandezze incommensurabili.

Nelle pagine precedenti abbiamo introdotto il concetto di numero razionale, come rapporto tra due grandezze che abbiano un multiplo comune.

Precisamente abbiamo visto che, date due grandezze omogenee A e B, se esse hanno un multiplo comune, cioè se esistono due interi naturali m ed n tali che si abbia:

(1) $$n \cdot A = m \cdot B,$$

allora è anche:

(2) $$(k \cdot n) \cdot A = (k \cdot m) \cdot B$$

essendo k un intero naturale qualunque,e si può anche scrivere:

(3) $$A = (m/n) \cdot B; \qquad B = (n/m) \cdot A$$

ed infine:

(4) $$(1/m) \cdot A = (1/n) \cdot B$$

Quando ciò avvenga si suol dire che le due grandezze A e B sono "commensurabili tra loro", ed il razionale m/n viene chiamato "rapporto" delle due grandezze..

Ci si può ora domandare se, date due grandezze qualisivogliano A e B, possano sussistere tra esse delle relazioni del tipo di quelle che abbiamo scritto, ossia se esse siano in ogni caso tra loro commensurabili. La risposta a questa domanda è negativa, in conseguenza di uno dei primi teoremi che la Storia ricordi, e precisamente di quello che viene chiamato "Teorema di Pitagora". Infatti in conseguenza di questo teorema si ha che esistono delle coppie di segmenti che non sono tra loro commensurabili: tali sono per esempio il lato e la diagonale di un medesimo quadrato; si suole esprimere questo fatto dicendo che tali segmenti sono "incommensurabili tra loro".

Quindi non esistono dei segmenti contemporaneamente multipli (secondo numeri interi) del lato e della diagonale del medesimo quadrato; oppure non esistono segmenti che siano sottomultipli di entrambi. Rimandiamo la dimostrazione di questo fatto all'APPENDICE che si trova alla fine di questo paragrafo. Pertanto, se accettiamo che le lunghezze dei segmenti rettilinei costituiscano una classe di grandezze, rispetto alla abituale operazione di somma dei segmenti, possiamo concludere che esistono delle coppie di grandezze incommensurabili tra loro.

Qui ci limitiamo ad osservare che questa conseguenza esprime una proprietà del continuo geometrico; proprietà che non è ovviamente posseduta dalla materia concreta sulla quale noi operiamo ed esperimentiamo; infatti le conoscenze che noi abbiamo sulla materia ci portano a concludere che essa ha una struttura discontinua, molecolare, atomica e subatomica. Pertanto la esistenza di coppie di grandezze tra loro incommensurabili è da considerarsi come la proprietà di un ente che non è puramente materiale, ma è stato costruito dalla nostra immaginazione a partire da esperienze sulla materia.

In questo capitolo svilupperemo la teoria che ha lo scopo di dare senso anche al concetto di rapporto tra grandezze tra loro incommensurabili; ciò si ottiene costruendo una classe di enti, che saranno chiamati "numeri reali" e che costituiscono una generalizzazione importantissima del concetto dei numeri razionali costruiti nei capitoli precedenti.

La classe dei numeri reali che costruiremo ammetterà come sottoclasse quella dei numeri razionali che già conosciamo, ma conterrà anche dei numeri che sono chiamati , con nomenclatura tradizionale, "irrazionali". Questo aggettivo non deve far pensare che tali enti siano contrari alla ragione; infatti la genesi di questo vocabolo deve essere fatta risalire alla lingua greca, nella quale il termine "logos" significa "pensiero, ragione", ma anche "rapporto". In questo secondo senso il termine greco è stato utilizzato in matematica, ed è stato tradotto con il vocabolo latino "ratio", che pure ha il significato di "ragione"(nel senso di pensiero coerente) , ma anche viene utilizzato in matematica con il senso di "rapporto". Pertanto l'aggettivo "irrazionale", detto di un numero, indica semplicemente che si tratta di un ente matematico che non è rappresentabile con un unico rapporto di due numeri naturali, come avviene per i numeri razionali che abbiamo costruito nei capitoli precedenti. Infatti nella lingua greca questi nuovi numeri che oggi noi chiamiamo irrazionali venivano anche designati con un aggettivo che li qualificava come "indicibili" o "inesprimibili" (ovviamente con un solo rapporto di due interi).

APPENDICE - La dimostrazione del fatto che la diagonale ed il lato di un medesimo quadrato sono grandezze incommensurabili si può ottenere con un ragionamento che è conosciuto da secoli, ed è esposto anche dal filosofo greco Platone in uno dei suoi celebri dialoghi, intitolato "Menone".

Esponiamo qui sommariamente il famoso ragionamento, che fa riferimento ad una figura molto elementare, che ogni lettore può immaginare o tracciare per proprio conto.

Si consideri un segmento, che indicheremo con u , e si costruisca il quadrato Q che ha u come lato. Si accostino poi al quadrato Q altri tre quadrati uguali, in modo da costruire un quadrato Q' che ha come lato il doppio del segmento u. Ovviamente l'area di Q' vale 4 volte quella di Q.

Si consideri ora il quadrato Q", che ha come vertici i punti medi dei lati di Q'; i lati di Q" sono diagonali di ognuno dei 4 quadrati che costituiscono Q', e quindi dividono ognuno di quei quadrati in due parti uguali. Ne consegue che l'area di Q" è la metà di quella di Q', ed il doppio di quella di Q.

Scegliamo come unità di misura delle aree l'area del quadrato Q; indichiamo con d la misura della diagonale di Q, che è lato di Q".L'area di Q" vale 2, come si è visto ed è data ovviamente da d^2; supponiamo che esista un numero razionale p/q che rappresenta la misura della diagonale d nella unità u. Si avrà quindi:

(5) $$d = (p/q)u;$$

ma abbiamo osservato che l'area del quadrato Q", di lato d, vale il doppio dell'area di Q. Quindi si avrà:

(6) $$d^2 = 2 \cdot 1,$$

e, per la (5):

$$(7) \qquad (p/q)^2 = 2.$$

Si dimostra ora che la (7) non può sussistere per alcuna coppia di interi p e q; a tal fine osserviamo che p e q possono essere presi primi tra loro, il che significa che si può sempre ritenere la frazione p/q ridotta, come si suol dire, ai minimi termini. Quindi in particolare i numeri interi p e q non potranno essere entrambi pari. Osserviamo ora che la (7) è equivalente alla :

$$(8) \qquad p^2 = 2 \cdot q^2;$$

ma questa relazione non può sussistere per alcuna coppia di interi; per dimostrarlo ricordiamo che abbiamo osservato che i numeri p e q possono essere supposti primi tra loro. Quindi in particolare se sono entrambi dispari la (8) non può sussistere, perchè vi sarebbe un numero dispari al primo membro ed un numero pari al secondo. Se poi p fosse pari, q dovrebbe essere dispari; ma la (8) non sussisterebbe lo stesso, perchè in questo caso al primo membro vi sarebbe un numero pari di fattori 2, ed al secondo membro un numero dispari di fattori 2; e ciò contraddice alla proprietà di aritmetica, la quale impone che un numero intero abbia una unica decomposizione in fattori primi.

OSSERVAZIONE 1 - Il teorema che abbiamo dimostrato costituisce un caso tipico di dimostrazione che viene chiamata "per assurdo": si tratta di una procedura logica con la quale si dimostra che una certa proposizione è falsa deducendone una conseguenza che è certamente falsa. Nel nostro caso la proposizione è l'affermazione che il lato e la diagonale del quadrato Q abbiano un rapporto razionale, esprimibile con una frazione p/q, ridotta ai minimi termini. La conseguenza è il sussistere della relazione (8), della quale abbiamo dimostrato la impossibilità.

Questa procedura per la dimostrazione viene usata anche in altri casi in geometria; qui ci basti aggiungere che la dimostrazione della impossibilità della relazione (8) viene conseguita in forza di un teorema di aritmetica.

* * *

2 - Il numero reale assoluto.

Abbiamo visto che esistono coppie di grandezze che sono incommensurabili tra loro, e quindi sono tali che il loro rapporto non può essere espresso con un unico numero razionale. Supponiamo che A e B siano incommensurabili tra loro; è possibile tuttavia considerare l'insieme di tutti i numeri razionali m/n tali che si abbia:

$$(9) \qquad (m/n) \cdot B < A;$$

è chiaro che i numeri razionali che soddisfano alla (9) sono infiniti; ed è anche chiaro che non tutti i razionali soddisfano alla (9).

Diremo che un insieme di numeri razionali è "superiormente limitato" se esiste (almeno) un numero razionale maggiore di ogni numero dell'insieme; è chiaro che se esiste un numero razionale con questa proprietà ne esistono infiniti, perché tutti i numeri maggiori di quello hanno la stessa proprietà, cioè quella di essere maggiori di ogni numero dell'insieme; e ciò per la proprietà transitiva della relazione d'ordine nell'insieme dei razionali.

Diremo che un insieme di numeri razionali è "completo" quando, se contiene un numero, contiene anche tutti i numeri minori di quello.

Si osserva subito che esiste un unico insieme completo che contiene un solo numero, ed è l'insieme {0} (singoletto) costituito dal solo numero zero; tutti gli altri insiemi completi di numeri razionali contengono infiniti numeri.

Ciò premesso, diremo "numeri reali" gli insiemi superiormente limitati e completi di numeri razionali. Ogni insieme cosiffatto sarà considerato come un tutto unico, ed il fatto che questi enti siano chiamati "numeri" sarà giustificato nelle pagine che seguono, in cui faremo vedere che è possibile definire per essi un insieme di relazioni e di operazioni che hanno proprietà formali analoghe a quelle possedute dagli enti che finora sono chiamati "numeri".

Ciò che è stato detto nel precedente paragrafo può ora essere visto in altra luce, con le seguenti considerazioni:

si abbia, per esempio, un problema nel quale si cerca un numero x il cui quadrato vale 2 ; il problema viene abitualmente tradotto con la equazione:

(10) $$x^2 = 2;$$

nel precedente paragrafo abbiamo visto che non può esistere alcun numero razionale che soddisfa alla (10).

Tuttavia le considerazioni di questo paragrafo ci conducono a costruire la classe di tutti i numeri razionali tali che sia:

(11) $$x^2 < 2;$$

questa classe contiene infiniti numeri, però si può trattare come un tutto unico; e vedremo che si possono definire per essa, e per tutte quelle che le sono analoghe, delle relazioni e delle operazioni tali che giustifichino il nome di numeri che daremo a questi enti.

A tal fine osserviamo anzitutto che anche un numero razionale singolo p/q dà luogo ad una classe superiormente limitata di numeri razionali: precisamente la classe di tutti gli x tali che sia:

(12) $$x \leq p/q.$$

In questo caso il numero p/q appartiene alla classe, ed è il più grande di tutti i suoi numeri; si suol dire che p/q è il "massimo" della classe. In generale diremo che una classe a superiormente limitata e completa di numeri razionali è "speciale" se esiste un numero razionale p/q tale che valga la (12) per ogni numero x della classe.

OSSERVAZIONE 2 - Le classi speciali sono in corrispondenza biunivoca con i numeri razionali; quando sia data una classe cosiffatta noi converremo di aggregare ad essa il numero razionale che le corrisponde.

Si dimostra che esistono infinite classi superiormente limitate e complete di numeri razionali che non sono speciali; il che significa che non possono essere determinate con una relazione del tipo della (12) ; si dimostra che, per esempio, tale è la classe definita dalla (11).

Ricordando la nomenclatura introdotta nel precedente paragrafo 1, l'insieme costituito dai numeri razionali e dagli irrazionali sarà chiamato insieme dei "numeri reali".

OSSERVAZIONE 3 - Le classi di numeri che abbiamo preso in considerazione contengono infiniti elementi, fatta esclusione della eola classe che corrisponde al numero 0 (zero). Pertanto non è possibile enumerare separatamente tutti gli elementi di una classe cosiffatta. Questa deve dunque essere assegnata mediante una legge, una regola, una procedura, che permetta di costruire quantisivogliano elementi della classe, soddisfacendo a determinate condizioni. Così per esempio, per quanto riguarda la classe definita dalla (11), possiamo pensare ad una procedura che conduce a costruire quanti si vogliano numeri razionali che le appartengano. A tal fine ricordiamo che i numeri razionali costituiscono un insieme che viene chiamato "numerabile", perché è possibile escogitare una procedura che li enumeri tutti, uno dopo l'altro. Tale procedura è stata presentata per la prima volta nella Storia dal grande matematico tedesco Georg Cantor.

Non possiamo qui esporre tale procedura, ma , sapendo che essa esiste, possiamo immaginare di far passare l'uno dopo l'altro tutti i numeri razionali; di ognuno di essi possiamo fare il quadrato e confrontarlo con il numero 2: se tale quadrato è minore, il numero razionale viene attribuito alla classe che stiamo costruendo, se il quadrato è maggiore il numero razionale viene scartato.

Abitualmente, ai fini del calcolo numerico e della rappresentazione degli enti che interessano, vengono seguite altre procedure, di cui diremo in seguito.

Qui ricordiamo che abbiamo definito numero reale (razionale o irrazionale) una classe superiormente limitata e completa di numeri razionali . Sia a tale classe, ed indichiamo con il simbolo a' l'insieme complementare dell'insieme di numeri che costituiscono a; quindi a' sarà l'insieme costituito da tutti i numeri razionali i quali sono maggiori di ogni numero dell'insieme a.

Indichiamo con un unico simbolo , per esempio α, il numero reale costituito dalla classe a ; si suol dire che ogni elemento della classe a fornisce un "valore approssimato per difetto" del numero reale α, e che ogni elemento della classe complementare a' fornisce un "valore approssimato per eccesso" del numero reale α.

Si dimostra che, fissato comunque un numero razionale δ, è possibile determinare un valore per eccesso ed uno per difetto di α tali che la loro differenza sia minore di δ.

Si suol esprimere questo fatto dicendo che "si può determinare il valore di α con un errore minore di δ". Questo modo di esprimersi è suggerito dalle immagini geometriche e dalle applicazioni della teoria dei numeri reali alle grandezze continue; tuttavia esso non è completamente rigoroso, anche se è comunemente adottato, sopratutto dai tecnici. Infatti, ricordando come abbiamo definito il numero reale α, non ha senso parlare del "valore di α"; questo ente infatti è costituito da una classe a di numeri razionali; pertanto si potrebbe parlare di "valore di α" soltanto qualora α fosse un numero razionale p/q.

OSSERVAZIONE 4 - Si suole rappresentare un numero reale con i simboli chiamati abitualmente "numeri decimali"; ripetiamo che tale rappresentazione non può mai essere completamente esatta, salvo che per numeri razionali particolari, e cioè quelli che possono essere rappresentati con frazioni che hanno al denominatore delle potenze del 10. Tuttavia la rappresentazione con simboli di questo tipo non è la sola che può essere data dei numeri irrazionali. La matematica ne conosce delle altre, che possono essere utili in qualche caso. Tuttavia, come è stato detto sopra (Oss.3), si hanno in ogni caso delle rappresentazioni che fanno ricorso a procedure infinite, cioè indefinitamente ripetibili.

OSSERVAZIONE 5 - Abbiamo parlato poco sopra delle particolari frazioni che hanno come denominatore una potenza del 10; è noto che tali frazioni sono di uso comune e vengono presentate abitualmente con convenzioni di scrittura molto comode, di cui parleremo in seguito, nel paragrafo 4. Ci limitiamo qui a ricordare che questo modo di rappresentare i numeri razionali può richiedere delle procedure infinite, anche quando si debbano rappresentare degli enti che, con convenzioni diverse, potrebbero ammettere delle rappresentazioni esatte con un unico simbolo: ciò avviene per esempio quando si voglia rappresentare con questi strumenti dei numeri razionali che corrispondono a frazioni le quali, ridotte ai minimi termini, presentano nel denominatore dei fattori diversi dal 2 e dal 5, cioè dei fattori della base 10 della nostra numerazione. Un eventuale cambiamento della base di numerazione porterebbe soltanto a cambiare l'insieme dei numeri razionali che vengono rappresentati con un simbolo infinito. Supponiamo per esempio di scegliere la base 3 per la rappresentazione dei numeri; allora, come è noto, basterebbero le sole cifre 0, 1, 2 per rappresentare ogni numero, con le abituali convenzioni posizionali per il valore delle cifre. Con queste convenzioni il razionale 2/3 sarebbe rappresentato dal simbolo finito 0.2. Ma in compenso il razionale 1/2 sarebbe rappresentato con il simbolo infinito:

$$0.2222222....,\tag{13}$$

mentre con la scelta abituale della base 10 si avrebbe, come è noto:

$$1/2 = 0.5.\tag{14}$$

* * *

3 - Ordinamento ed operazioni nell'insieme dei reali.

Siano ora due numeri reali α e β e siano a e b rispettivamente le classi superiormente limitate e complete di numeri razionali che li costituiscono. Ricordiamo ciò che abbiamo detto sopra, nella Oss. 2 del paragrafo precedente, convenendo di aggregare ad ogni classe speciale il numero razionale che è il suo massimo. Con queste convenzioni, scriveremo:

(15) $$\alpha = \beta$$

per indicare che le classi a e b di numeri razionali che costituiscono i numeri reali α e β coincidono, nel senso della teoria degli insiemi, cioè nel senso che ogni elemento dell'una è anche elemento dell'altra.

In base a questa definizione si verifica che la relazione indicata con la (15) possiede le tre classiche proprietà : riflessiva, simmetrica e trasitiva che caratterizzano quelle relazioni che qualche Autore chiama "equaliformi".

Scriveremo poi :

(16) $$\alpha > \beta$$

per indicare che nella classe a' esiste almeno un elemento che è maggiore di ogni elemento della classe b .Infine scriveremo:

(17) $$\beta < \alpha$$

come relazione equivalente alla (16).

Anche in questo caso si dimostra che la relazione indicata nella (16) possiede la proprietà transitiva; inoltre si verifica che , dati due numeri reali α e β vale sempre una ed una sola delle relazioni:

(18) $$\alpha > \beta \qquad \alpha = \beta \qquad \alpha < \beta.$$

Con queste definizioni abbiamo stabilito una relazione di uguaglianza ed una relazione di ordine totale nell'insieme dei numeri reali, relazioni che hanno le stesse proprietà formali di quelle che abbiamo stabilito a suo tempo tra i numeri razionali, le cui proprietà fondano quelle dei numeri reali, a seguito delle definizioni che abbiamo dato.

Siano ora α e β due numeri reali, costituiti rispettivamente dalle classi, superiormente limitate e complete , di numeri razionali a e b .

Costruiamo ora la classe di numeri razionali che si ottiene sommando in tutti i modi possibili un numero della classe a con uno della classe b. Si dimostra che si ottiene così una classe superiormente limitata di numeri razionali, classe che converremo di rendere completa, associando ad essa ogni numero razionale che sia minore di uno dei suoi. Con questa operazione di ottiene quindi un numero reale che converremo di chiamare "somma" dei due dati e che indicheremo con il simbolo abituale:

(19) $$\alpha + \beta;$$

si suole chiamare "addizione" l'operazione che conduce al numero indicato con la (19) e di chiamare, secondo l'uso, "addendo" ognuno dei due numeri reali sui quali si opera; tuttavia si usa anche chiamare "somma" tanto l'operazione che si esegue sui numeri che il risultato di essa. Si verifica che questa operazione ha le due proprietà, commutativa ed associativa, possedute dalla operazione di somma tra numeri razionali, che abbiamo definito a suo tempo.

Inoltre si ha che, se i due numeri reali sono entrambi speciali, nel senso precisato nella Oss.2 del paragrafo precedente, anche la loro somma è speciale e coincide con il numero reale che corrisponde alla somma dei numeri razionali, ognuno dei quali determina la classe su cui si opera.

Siano ancora due numeri reali α e β, e siano a e b le classi, complete e superiormente limitate, di numeri razionali che li costituiscono.

Costruiamo ora la classe che si ottiene moltiplicando, in tutti i modi possibili, ogni numero della classe a con uno della classe b; si dimostra che si ottiene così una classe superiormente limitata di numeri razionali, classe che converremo di rendere completa associandole ogni numero che sia minore di uno dei suoi. Con questa operazione si ottiene quindi un numero reale, che converremo di chiamare "prodotto" dei due numeri e di indicare con il simbolo:

$$\alpha \cdot \beta; \tag{20}$$

abitualmente si conviene di chiamare "moltiplicazione" l'operazione che conduce al numero indicato con la (20), chiamando inoltre "fattori" i due numeri su cui si opera. Tuttavia è invalso l'uso di chiamare "prodotto" dei due numeri tanto l'operazione che il risultato di essa. Si dimostra che questa operazione possiede le due proprietà, commutativa ed associativa, che competono alla operazione di prodotto, definita a suo tempo per i numeri razionali. Essa è inoltre distributiva rispetto alla somma ed infine, quando i numeri α e β siano entrambi speciali, conduce ad un numero reale che corrisponde al numero razionale che è prodotto dei dati, secondo la definizione che abbiamo dato a suo tempo.

Siamo così giunti a definire, per i numeri reali, delle relazioni e delle operazioni che hanno le stesse proprietà formali delle relazioni e delle operazioni a suo tempo definite per i numeri razionali; relazioni ed operazioni che si riducono a quelle valide per i numeri razionali quando i numeri reali sui quali si opera siano dei numeri speciali, cioè corrispondano ai numeri razionali già noti.

Si suole esporre quanto abbiamo ora osservato dicendo che l'insieme dei numeri reali costituisce un "ampliamento" dell'insieme dei numeri razionali; con espressione più precisa si suole anche dire che nell'insieme dei numeri reali esiste un sottoinsieme (che noi abbiamo qui convenzionalmente qualificato come insieme dei numeri "speciali") che è in corrispondenza biunivoca con quello dei numeri razionali, in modo che, quando si esegue una certa operazione su due numeri reali speciali, anche il risultato sia speciale, e corrisponda al risultato della operazione sui numeri razionali corrispondenti a quelli sui quali si è operato. Una corrispondenza di questo tipo si suol chiamare "omomorfismo"; pertanto si suol esprimere ciò che abbiamo detto fin qui dicendo che esiste un omomorfismo tra l'insieme dei razionali e l'insieme dei reali.

Sia ora α un numero reale diverso dallo zero, costituito da un insieme a, completo e superiormente limitato, di numeri razionali, non tutti nulli per ipotesi; ricordiamo che abbiamo indicato con a' l'insieme complementare dell'insieme a (Oss. 3), cioè l'insieme costituito da tutti i razionali, ognuno dei quali è maggiore di tutti i numeri di a. Indichiamo con il simbolo :

(21) $$1/\alpha$$
il numero reale costituito dall'insieme dei numeri razionali che sono reciproci dei numeri di a'; questo insieme è superiormente limitato, perchè, per ipotesi, l'insieme a' è inferiormente limitato da almeno un numero diverso da zero. Si dimostra inoltre che è:

(22) $$\alpha\cdot(1/\alpha) = 1.$$

Porremo inoltre:

(23) $$\beta\cdot(1/\alpha) = \beta/\alpha.$$

L'operazione indicata con il simbolo che è a secondo membro della (23) può essere chiamata "divisione" del numero β per il numero α (diverso dallo zero); e si dimostra che per questa operazione valgono tutte le proprietà formali che abbiamo dimostrato valide, nel capitolo precedente, per la operazione di divisione tra numeri razionali. Il risultato di questa operazione si può chiamare "rapporto" o anche "quoziente" dei due numeri β ed α.

Analogamente, supponiamo che valga la (16); ricordiamo che ciò significa, per definizione, che esistono dei numeri dell'insieme a che sono maggiori di numeri dell'insieme b', complementare dell'insieme b, che costituisce il numero β. Costruiamo allora l'insieme costituito da tutti i numeri che si ottengono sottraendo da numeri dell'insieme a, in tutti i modi possibili, quei numeri dell'insieme b' che sono minori di essi. Si dimostra che si ottiene così una classe superiormente limitata di numeri razionali, che costituisce un numero reale il quale sarà indicato con il simbolo:

(24) $$\alpha - \beta;$$
si dimostra che la operazione indicata nella (24) ha tutte le proprietà formali della operazione di sottrazione tra numeri razionali; pertanto essa sarà chiamata "sottrazione" di β da α; ed il risultato dell'operazione potrà essere chiamato "differenza" dei due numeri.

* * *

4 - I calcoli con il sistema decimale.

Ciò che è stato esposto fin qui viene tradotto nella pratica abituale dei calcoli, ed applicato alle consuete convenzioni per la rappresentazione dei numeri. Ricordiamo infatti che, nell'aritmetica pratica e nella utilizzazione delle macchine calcolatrici, vengono abitualmente adottate certe convenzioni, delle quali ricorderemo qui i punti fondamentali.

Infatti per la rappresentazione dei numeri naturali si adottano da secoli le notazioni inventate dagli indiani ed a noi trasmesse dagli arabi: tali notazioni si fondano sulla scelta della base 10 per la numerazione e sulla adozione della convenzione posizionale per la rappresentazione scritta dei numeri. Secondo questa convenzione, il valore di una cifra nella rappresentazione di un numero dipende (per un fattore che è una potenza del 10) dalla posizione della cifra stessa nella scrittura del numero. Così per esempio con il simbolo 237 si intende indicare il numero dato da:

$$2\cdot 100 + 3\cdot 10 + 7.$$

Queste convenzioni di scrittura si riflettono poi, come è noto, sulle convenzioni di lettura dei simboli numerici.

In modo analogo vengono rappresentati certi numeri razionali appartenenti ad una classe molto ristretta: precisamente quelli che possono essere rappresentati da frazioni le quali, ridotte ai minimi termini, hanno un denominatore che contiene soltanto i fattori 2 e 5, cioè i fattori della base di numerazione adottata. Questi numeri razionali sono rappresentati con convenzioni ben note, usando il "punto decimale" (oppure, secondo altre abitudini, la "virgola decimale"); con queste convenzioni per esempio il numero razionale:

$$123/25 = (123\cdot 4)/100 = 492/100 \tag{25}$$

viene rappresentato col simbolo:

$$4.92 \quad \text{oppure} \quad 4{,}92; \tag{26}$$

è invalsa anche l'abitudine di indicare questi simboli con il termine "numeri decimali"; purtroppo questo modo di esprimersi potrebbe indurre taluno a pensare questi simboli indichino dei numeri di una nuova specie, mentre essi sono soltanto degli strumenti comodi ed utili per rappresentare dei numeri razionali particolari. Sarebbe quindi meglio parlare di "rappresentazione decimale di numeri razionali".

Quando un razionale come quello dato nella (25) viene rappresentato nella forma (26) si suol dire che si è data un "rappresentazione decimale" del razionale stesso. Il numero costituito dalle cifre che compaiono, nella rappresentazione, prima del punto viene detto anche "parte intera " del numero rappresentato, e le cifre corrispondenti vengono dette "cifre della parte intera" o anche semplicemente "cifre intere" del numero; le cifre che compaiono a destra del punto vengono chiamate "cifre decimali" del numero stesso.

Richiamando quanto è stato detto sopra (nell'Oss.3 del N. 2), nella pratica dei calcoli la classe infinita a di numeri razionali, che costituisce un numero reale α, non può essere rappresentata elencando tutti i suoi elementi; occorre quindi assegnare una legge, una procedura che caratterizzi i razionali della classe stessa.

Abitualmente ci si limita a dare la rappresentazione decimale di una sottoclasse dei valori approssimati per difetto del numero reale che interessa, sottoclasse che è scelta con criteri opportuni, per fornire informazioni a chi debba utilizzare i dati per i calcoli.

Per esempio, ricordando che si indica abitualmente con il simbolo π il numero chiamato da alcuni "costante di Archimede", che fornisce il rapporto tra la lunghezza di una circonferenza e quella del suo diametro, scrivendo :

$$\pi = 3.141592654... \tag{27}$$

si danno le seguenti informazioni:

I) Tutti i cosiddetti numeri decimali che si ottengono scrivendo soltanto un certo numero di cifre decimali a destra del punto forniscono dei valori approssimati per difetto (nel senso che abbiamo precisato) del numero π; tali sono per esempio i numeri seguenti:

(28) 3; 3.1; 3.14; 3.141; 3.1415; 3.14159; 3.141592 ecc.

Questi numeri vengono anche chiamati "valori troncati" del numero π.

II) Aggiungendo una unità all'ultima cifra di destra di ognuno dei numeri (28) si ottiene un valore approssimato per eccesso di π. Tali sono quindi i numeri:

(29) 4; 3.2; 3.15; 3.142; 3.1416; 3.14160; 3.141593 ecc.

Si osservi tuttavia che ciò vale di regola; ma rifletteremo ulteriormente in proposito nella Oss.6.

III) I punti che figurano a destra del simbolo (27) indicano che il numero π non può essere identificato con il numero razionale:

$$3.141592654 = 3141592654/1000000000.$$

Pertanto in particolare è sconsigliabile identificare (come spesso avviene) il numero π con il razionale 3.14 = 314/100. Infatti questa identificazione indurrebbe taluno alla convinzione che la informazione che si fornisce è esatta, mentre ciò non è, e la matematica conosce delle procedure precise per migliorare l'informazione qualora ciò occorresse. Per esempio si vede che i numeri delle successioni (28) e (29) forniscono delle informazioni con errori che vanno diminuendo da sinistra a destra.

Spesso anche si forniscono dei valori che vengono chiamati "arrotondati" della rappresentazione decimale di un numero. Tali valori si ottengono con la seguente procedura: si trascurano le cifre decimali da un certo punto in poi ; l'ultima cifra decimale che si scrive è quella originaria se la prima cifra che si trascura è 0, 1, 2 , 3 oppure 4. In tale caso si ottiene un valore per difetto del numero considerato. L'ultima cifra che si scrive viene aumentata di un'unità se la prima cifra trascurata è 5, 6, 7, 8 oppure 9. In tal caso si ottiene un valore approssimato per eccesso del numero considerato. Così per esempio nel caso del numero π i numeri :

(30) 3; 3.1; 3.14; 3.142; 3.1416; 3.14159; 3.14593

forniscono dei valori arrotondati del numero stesso, secondo le procedure esposte.

Alcune tavole numeriche danno opportune indicazioni per informare gli utenti sul fatto che i numeri decimali stampati forniscono, di volta in volta, dei valori per difetto o per eccesso.

OSSERVAZIONE 6 - Quando si vogliano rappresentare i numeri razionali in forma decimale non è possibile evitare sempre l'impiego di simboli infiniti: questi infatti sono necessari quando si tratti di rappresentare in forma decimale un razionale dato da una frazione la quale, ridotta ai minimi termini, abbia un denominatore che contiene dei fattori diversi da 2 e da 5 (che sono i fattori della base di numerazione). E' noto che in questo caso si ottengono dei simboli infiniti, che vengono abitualmente chiamati "numeri decimali periodici", per indicare che le cifre, dopo il punto decimale, si susseguono, da un certo posto in poi, con una legge regolare.

Il gruppo di cifre che si ripetono regolarmente viene chiamato "periodo" della rappresentazione decimale del numero razionale, e si adottano delle opportune convenzioni di scrittura per indicare che un certo numero decimale è periodico, e per mettere in evidenza il suo periodo; abitualmente le cifre che lo costituiscono vengono scritte tra parentesi tonde, e si suol dire che le cifre che precedono queste costituiscono lo "antiperiodo" della rappresentazione decimale.

Così per esempio il razionale 1/7 viene rappresentato in forma decimale col numero periodico:

(31) $$1/7 = 0.(142857)$$
ed il razionale 743/550 viene rappresentato col numero periodico:

(32) $$743/550 = 1.35(09),$$
nel quale il numero 1 viene chiamato "parte intera" e le cifre 3 e 5 costituiscono l'antiperiodo.

Viceversa si può far vedere che ogni numero decimale periodico rappresenta un numero razionale, il quale può essere rappresentato in forma finita con una frazione che si costruisce con regole ben determinate e viene chiamata "frazione generatrice" del numero decimale periodico. La sua costruzione verrà data in appendice a questo paragrafo.

OSSERVAZIONE 7 - Le procedure con le quali abbiamo definito le operazioni tra i numeri reali indicano anche il significato e la portata delle operazioni che si eseguono nella pratica sugli insiemi finiti di valori per difetto o per eccesso con i quali si lavora nei calcoli numerici.

Dalle definizioni dei numeri reali e delle operazioni su di essi si traggono infatti delle regole, che spesso non sono insegnate nei testi e spesso sono trascurate nella pratica, ottenendo così delle informazioni inattendibili e fuorvianti.

Non possiamo dare qui una trattazione completa della teoria delle approssimazioni numeriche, e pertanto ci limiteremo a presentare qualche esempio significativo.

Esempio 1 - Sia il razionale 2/3, che viene rappresentato in forma decimale dal numero periodico:

(33) $$0.(6);$$
si consideri il reciproco 3/2, che è dato ovviamente dal decimale finito :

(34) $$3/2 = 1.5.$$
Se si volessero calcolare i valori approssimati per difetto del numero (34), occorrerebbe calcolare i reciproci dei numeri:

(35) $$0.7; \quad 0.67; \quad 0.667; \quad 0.6667; \quad 0.66667 \quad \text{ecc.}$$
Prendendo i valori troncati con 5 cifre decimali dei reciproci dei numeri (35) si otterrebbero i numeri:

(36) $$1.42857; \; 1.49253; \; 1.49925; \; 1.49992; \; 1.49999$$
Si osserva facilmente che, quando si aumenti di una unità l'ultima cifra a destra dei numeri (36) non sempre si ottiene un valore per eccesso del

numero (34); e ciò avviene ovviamente perchè i numeri (36) sono ottenuti con calcoli che forniscono dei valori approssimati per difetto, con errori che debbono essere stimati opportunamente.

Esempio 2 - Sia dato il problema di calcolare la lunghezza d del diametro di una circonferenza che ha lunghezza 10.

La formula da utilizzare è:

(37) $$d = 10/\pi,$$

essendo π la nota costante di Archimede, il cui valore approssimato per difetto a meno di un errore di 1/1000000000 è dato dalla (27):

(27) $$\pi = 3.141592654...$$

La definizione data di rapporto tra due numeri reali conduce a costruire dei rappresentanti della classe dei valori per difetto del numero d, dividendo 10 per i numeri razionali della successione (29). Si ottengono così i numeri :

(38) 2.5; 3.125; 3.17460317...; 3.18268618..ecc.

Questi numeri, come abbiamo detto, appartengono alla classe dei valori per difetto del numero d che si vuole rappresentare; occorre tuttavia osservare che in questo caso non vale la proprietà che è stata esposta poco sopra: infatti non è detto che, aggiungendo una unità all'ultima cifra decimale di destra, si ottenga un valore per eccesso del numero d ; e ciò avviene perché i numeri stessi sono stati ottenuti con le procedure abituali dell'aritmetica pratica, che non forniscono dei valori esatti per tutti i razionali, quando si vogliano rappresentare in forma decimale, come è stato detto sopra nell'Oss. 5. La valutazione dell'errore che si commette assumendo un razionale che si ottiene troncando un numero della successione (38) come valore approssimato di d richiederebbe degli sviluppi che non possiamo qui presentare. Tuttavia si possono ottenere delle limitazioni dell'errore calcolando anche la successione dei numeri che si ottengono dividendo il 10 per i numeri della successione (28), che sono valori approssimati per difetto di π; si ottengono dei valori approssimati per eccesso del numero d. Si otterrebbero così i numeri:

(39) 3.333333...; 3.22580654 ; 3.18471337...; 3.18369945...; 3.1839274...

Questi costituiscono dei valori approssimati per eccesso del numero d , ed il confronto tra numeri che hanno lo stesso posto nelle due successioni permette di determinare degli intervalli di errore che danno delle informazioni sicure: per esempio, confrontando i numeri che hanno il quinto posto nelle due successioni (38) e (39) si ottengono le diseguaglianze:

(40) $$3.18268 < d < 3.18393.$$

Si noti che se qualcuno avesse assunto come valore approssimato di d il numero:

(41) $$10/3.14 = 3.18471337$$

avrebbe trovato un valore approssimato per eccesso con un errore superiore a quello che si può desumere dalle (40), che è di 125/100000.

APPENDICE - La frazione generatrice di un numero decimale periodico si ottiene con la seguente procedura, che viene riportata nei testi di aritmetica pratica, e della quale non riportiamo qui la giustificazione:

il numeratore della frazione è la differenza tra il numero che si ottiene scrivendo la parte intera, l'antiperiodo ed il periodo, e quello che si ottiene semplicemente scrivendo la parte intera e l'antiperiodo;

il denominatore della frazione è il numero formato da tante cifre 9 quante sono le cifre del periodo, seguite da tanti zeri quante sono le cifre dell'antiperiodo.

Così per esempio nel caso del numero dato da :

$$1.35(09),$$

il numeratore della frazione generatrice è dato da:

$$13509-135 = 13374,$$

ed il denominatore è dato da:

$$9900;$$

quindi la frazione generatrice è:

$$13374/9900 = 743/550.$$

* * *

V - MISURE E PROPORZIONALITA'.

1 - Il numero reale come rapporto tra grandezze.

Abbiamo visto che, date due grandezze omogenee A e B, si può identificare un numero reale, che qui indicheremo con σ, costituito dall'insieme superiormente limitato e completo dei numeri razionali m/n, tali che sia:

$$A \geq (m/n)\cdot B; \tag{1}$$

tale numero può essere chiamato "rapporto " di A a B. Gli sviluppi dei capitoli precedenti permettono anche di affermare che, viceversa, dato il numero reale σ e la grandezza B, esiste una unica grandezza A tale che valga la (1) per ogni razionale costituente il numero reale σ. Infatti quest'ultimo è costituito, secondo la definizione da noi data, da una classe superiormente limitata e completa di numeri razionali, e ad ognuno di questi corrisponde una grandezza. Si ottiene così una classe superiormente limitata di grandezze omogenee, classe che ha un estremo superiore A, a norma dell'AX VII . Possiamo quindi far corrispondere A al numero reale σ, e scrivere convenzionalmente :

$$A = \sigma\cdot B. \tag{2}$$

Perciò, quando sia fissata una grandezza B, si ottiene una corrispondenza biunivoca tra grandezze di una classe di grandezze omogenee e numeri reali.

Il contenuto della (2) può essere espresso con altre parole dicendo che la (2) presenta i numeri reali come operatori su grandezze: infatti il significato della stessa (2) è precisato dalla procedura con cui la grandezza A può essere costruita o determinata partendo dalla grandezza B e dal numero reale σ; ripetiamo infatti che il numero σ è costituito da una classe superiormente limitata di numeri razionali; ognuno di questi può essere considerato come un operatore il quale, applicato alla B, produce una grandezza; la grandezza A, simbolizzata dalla (2), è l'estremo superiore delle grandezze così ottenute. Nel caso particolare in cui il numero σ sia razionale, la grandezza A può essere ottenuta direttamente con una sola operazione, come si è visto nel capitolo III.

Queste considerazioni ci autorizzano anche a dire che il secondo membro della (2) esprime il "prodotto" della grandezza B per il numero reale σ. In base agli sviluppi dei capitoli precedenti, ed in base alle definizioni ora date, si dimostra che per l'operazione di prodotto di un numero reale per una grandezza valgono le seguenti relazioni:

indicate con X ed Y delle grandezze omogenee, e con α e β due numeri reali, si ha:

$$\begin{aligned} 1\cdot X &= X \\ (\alpha+\beta)\cdot X &= \alpha\cdot X + \beta\cdot X \\ \alpha\cdot(X + Y) &= \alpha\cdot X + \alpha\cdot Y \\ \alpha\cdot(\beta\cdot X) &= (\alpha\cdot\beta)\cdot X. \end{aligned} \tag{3}$$

CONVENZIONE - Qualora sussista la (2), converremo di scrivere:

$$\sigma = A/B \quad \text{oppure anche} \quad \sigma = A:B \tag{4}$$

o anche di scrivere i due simboli A ed B l'uno sopra l'altro, separati da una lineetta orizzontale, come si usa per indicare le frazioni, per indicare che il numero reale σ è il rapporto tra le due grandezze A ed B. Tuttavia i simboli avranno soltanto il significato che qui è chiarito, e non devono essere interpretati come se indicassero una operazione di "divisione" tra due grandezze, operazione alla quale non intendiamo qui dare senso.

Dalle (3) si deduce anche che valgono, in conseguenza delle (4), anche le:

(4a) $$B = (1/\sigma)\cdot A \quad \text{oppure} \quad B/A = 1/\sigma.$$

* * *

2 - La proporzione.

Consideriamo ora due classi di grandezze omogenee G e G'; siano A e B due grandezze, tra loro omogenee, della classe G, e siano A' e B' due grandezze, tra loro omogenee, della classe G'. Non necessariamente le grandezze della classe G sono omogenee con quelle della classe G', ma questo caso non viene escluso a priori dalla trattazione che faremo.

In base a ciò che è stato detto finora, esiste un numero reale σ che è il rapporto tra A e B ; vale cioè la (2). Analogamente esiste un numero reale σ' che è il rapporto tra A' e B'; si ha cioè:

(5) $$A' = \sigma'\cdot B'.$$

Se è:

(6) $$\sigma = \sigma'$$
si suol dire che vale la relazione:

(7) $$A:B = A':B' \quad \text{oppure anche} \quad A:B::A':B'$$
che viene letta abitualmente con la frase: A sta a B come A' sta a B'; la relazione stessa viene chiamata "proporzione".

* * *

3 - La teoria classica delle proporzioni.

La teoria delle proporzioni risale alla matematica greca: la sua trattazione rigorosa si trova nel libro V degli "Elementi" di Euclide, ma gli storici fanno risalire la teoria stessa al geometra Eudosso da Cnido, ed attribuiscono ad Euclide il ruolo di espositore e compilatore dell'opera altrui.

Il concetto di "proporzione", che si incontra negli Elementi di Euclide, potrebbe essere esposto in linguaggio moderno nel modo seguente; facendo riferimento ai simboli adottati sopra, la proporzione (7) sussiste quando, per ogni coppia di numeri interi naturali n,m , ogni volta che è:

$$(8)\qquad \begin{array}{lll} n\cdot A > m\cdot B & \text{è anche} & n\cdot A' > m\cdot B' \text{ e viceversa} \\ n\cdot A = m\cdot B & \text{è anche} & n\cdot A' = m\cdot B' \text{ e viceversa} \\ n\cdot A < m\cdot B & \text{è anche} & n\cdot A' < m\cdot B' \text{ e viceversa.} \end{array}$$

Galileo Galilei, nella lingua italiana del secolo XVII, traduce le parole di Euclide dicendo:

" Allora quattro grandezze sono proporzionali, quando gli ugualmente multiplici della prima e della terza, presi secondo qualunque multiplicità, si accorderanno sempre nel superare, mancare o pareggiare gli ugualmente multiplici della seconda e della quarta" (si veda [11]).

Quindi Euclide non definisce il rapporto tra due grandezze omogenee, ma precisa soltanto quando due rapporti siano da considerarsi tra loro uguali; il rapporto viene definito "per astrazione", con una procedura di cui abbiamo già parlato.

Si osserva che questa definizione contempla in generale delle procedure necessariamente infinite, a meno che non ci si trovi nel caso particolare in cui le grandezze A e B sono tra loro commensurabili.

Attilio Frajese, nel tradurre e commentare il testo euclideo, dice esplicitamente [11]:

" occorrono concettualmente infinite verifiche di concordanze di segni [nelle relazioni (8)] : Eudosso non ha potuto evitare, escludere l'infinito nel determinare (o definire) il rapporto tra due grandezze incommensurabili: lo ha però imbrigliato, nel senso che ha ideato un procedimento rigoroso, contenuto in uno schema fisso invariabile."

Nella trattazione che stiamo esponendo, uno schema di questo tipo è stato esposto nel Capitolo precedente, N. 2, Oss. 3. Notiamo inoltre che le relazioni (8) sono esattamente quelle che conducono alla costruzione dei numeri reali σ ed σ', ed a verificare il sussistere della (6).

Dal sussistere della (7), e dalla definizione data, si trae il sussistere della :

$$(9)\qquad (A+B):B = (A'+B'):B',$$

proporzione che si suol dire ottenuta dalla (7) "componendo". Inoltre, se è valida la :

$$(10)\qquad A>B \text{ e quindi anche } A'>B',$$

si dimostra che vale anche la:

$$(11)\qquad (A-B):B = (A'- B'):B',$$

proporzione che si suol dire ottenuta dalla (7) "dividendo".

Nella impostazione da noi data alla teoria, la dimostrazione di queste proprietà è immediata, in forza delle definizioni di numero reale, di rapporto tra grandezze omogenee, e sulla base delle proprietà postulate per le grandezze. La dimostrazione della validità della (11) che si incontra negli Elementi di Euclide è stata riconosciuta come lacunosa da vari autori, già qualche secolo fa; essa infatti fa ricorso alla ipotesi che esista la grandezza B' che è la quarta proporzionale dopo A, B, A'. Ma questa esistenza non discende dalle proposizioni precedentemente dimostrate da Euclide nella sua opera, nè dai postulati da lui enunciati . Nella nostra impostazione, la esistenza della grandezza nominata è garantita dal postulato di continuità, come è stato detto nel paragrafo 1, a proposito del significato della (2).

OSSERVAZIONE 1 - Nel caso in cui le grandezze considerate siano le lunghezze di segmenti rettilinei la obiezione ora esposta non vale, perchè il segmento quarto proporzionale dopo tre segmenti dati viene costruito con una procedura ben nota, che consiste nella applicazione del classico teorema detto "di Talete", come vedremo nel seguito. Ma nel caso di grandezze qualsivogliano l'obiezione rimane valida, fino a che non si enunci esplicitamente un postulato che garantisca in qualche modo la corrispondenza biunivoca tra grandezze (comunque queste vengano definite) e numeri reali.

* * *

4 - La misura.

Ciò che è stato detto finora può essere presentato in forma diversa con le seguenti considerazioni:

In una classe di grandezze omogenee si scelga una grandezza U, che verrà chiamata "unità di misura"; allora ad ogni grandezza A della classe corrisponderà biunivocamente un numero reale α tale che si abbia:

(12) $$A = \alpha \cdot U;$$

il numero α che compare nella (12) sarà chiamato "misura di A nella unità U". Analogamente, considerata una grandezza B, omogenea con la A e la U, si avrà:

(13) $$B = \beta \cdot U.$$

Se indichiamo anche qui con σ il rapporto tra A e B, dalle (4) si trae:

(14) $$\alpha = \sigma \cdot \beta,$$

ossia :

(14a) $$\sigma = \alpha/\beta.$$

Supponiamo ora di scegliere un'altra grandezza V come unità di misura, e si abbia:

(15) $$U = \mu \cdot V;$$

sempre in forza delle (4) si ottiene:

(16) $$\sigma = (\alpha \cdot \mu)/(\beta \cdot \mu) = \alpha/\beta .$$

Si ha pertanto il

Teorema : Il rapporto tra due grandezze omogenee è uguale al numero reale che è rapporto delle loro misure, prese in una unità qualsiasi.

Ancora sulla base delle (4), e per le (12) e (13) si ha:

(17) $$A+B = (\alpha+\beta) \cdot U.$$

Il significato della (17) potrebbe essere esposto in parole dicendo che la somma di due grandezze omogenee ha come misura, rispetto ad una data unità, la somma delle loro misure, nella stessa unità. Riassumendo ciò che è stato detto finora, si può dire che, con l'operazione di misura, si ottiene una rappresentazione di un insieme di grandezze omogenee con strumenti del linguaggio della matematica, rappresentazione che, con opportune convenzioni, associa una grandezza ad un simbolo ben determinato e viceversa. Inoltre questa rappresentazione fa corrispondere a certe operazioni sulle grandezze delle operazioni ben definite sui simboli matematici che le rappresentano; quindi ci permette di prevedere i risultati delle manipolazioni che noi eseguiamo sulla realtà materiale o sugli enti della geometria, semplicemente operando sui simboli con le leggi della matematica.

* * *

5 - Proporzionalità tra classi di grandezze.

Siano ancora G e G' due classi di grandezze omogenee; non necessariamente le grandezze della classe G sono omogenee con quelle della classe G', ma questo caso non viene escluso dalla trattazione che faremo.

Sia data una corrispondenza biunivoca tra le grandezze della classe G e quelle della G', tale che, prese comunque due grandezze A e B della G, e considerate le corrispondenti, A' e B' rispettivamente, della classe G', valga sempre la proporzione:

$$A:B = A':B'. \tag{7}$$

Se ciò accade la corrispondenza considerata viene chiamata "proporzionalità", e si usa dire che le due classi G e G' sono "proporzionali".

Perché una corrispondenza biunivoca tra due classi di grandezze G e G' sia una proporzionalità è sufficiente che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

I) la corrispondenza conservi la relazione di uguaglianza; cioè, se tra due grandezze A e B di G vale la:

$$A = B, \tag{8}$$

allora valga anche la :

$$A' = B' \tag{9}$$

tra le loro corrispondenti;

II) la corrispondenza conservi l'operazione di somma; cioè alla somma A+B di due grandezze di G faccia corrispondere la somma A'+B' delle grandezze corrispondenti;

III) la corrispondenza faccia corrispondere all'estremo superiore di una classe superiormente limitata di grandezze di G l'estremo superiore della classe delle grandezze corrispondenti di G'.

Si dimostra che, sulla base di queste proprietà, supposte valide per la corrispondenza considerata, alle procedure che conducono nella classe G a costruire il numero reale, rapporto di due grandezze della classe G, corrispondono, per la corrispondenza stabilita, delle procedure analoghe che conducono alla costruzione di un uguale numero reale, che è il rapporto delle due grandezze corrispondenti di G'.

In geometria si studia un caso particolare importantissimo di corrispondenza tra classi di grandezze che soddisfa alle condizioni esposte nel paragrafo precedente; si tratta della corrispondenza tra classi di segmenti appartenenti a due rette diverse, corrispondenza che è oggetto di un celebre teorema che viene indicato come "Teorema di Talete".

Come è noto, tale teorema contempla il caso in cui si abbia un fascio di rette tutte parallele tra loro, secate da due rette trasversali, che indicheremo con r ed r'. Le rette parallele determinano tra le due trasversali una corrispondenza che è biunivoca. Inoltre, con dimostrazioni elementari riguardanti i parallelogrammi, si dimostra che tale corrispondenza mantiene la relazione di uguaglianza tra segmenti, e fa corrispondere ad un segmento che è somma di due altri di una trasversale il segmento che è somma dei due corrispondenti sull'altra, ed all'estremo superiore di una classe di segmenti di r l'estremo superiore della classe dei segmenti corrispondenti di r'. Si stabilisce quindi una proporzionalità fra classi di grandezze corrispondenti, grandezze che in questo caso sono le lunghezze dei segmenti appartenenti alle due rette r ed r'.

E' noto che su questo teorema è fondata tutta la teoria della similitudine, che è fondamentale per la geometria elementare (euclidea).

Supponiamo ora che siano state fissate delle unità di misura, in ognuna delle due classi G e G'; allora ad ogni grandezza A della G corrisponderà biunivocamente un numero reale α, ed alla corrispondente A' corrisponderà un altro numero reale α'. La proporzionalità esistente tra le due classi G e G' si traduce ora in una corrispondenza tra i due numeri reali; corrispondenza che, nel linguaggio dell'analisi matematica, viene tradotta con una funzione f:

$$\alpha' = f(\alpha); \tag{10}$$

il fatto che la corrispondenza tra le due classi sia biunivoca si traduce nella esistenza di una funzione F, che è l'inversa della f, cioè tale che si abbia:

$$\alpha = F(\alpha'). \tag{11}$$

Le condizioni I), II), III) sopra elencate si traducono in proprietà della funzione f. Precisamente, indicate con α e β le misure di due grandezze A e B, le condizioni I) e II) si traducono nel sussistere per la funzione f della proprietà che alla somma corrisponda la somma: in formule si deve quindi avere:

$$f(\alpha+\beta) = f(\alpha)+f(\beta). \tag{12}$$

La condizione III) si traduce nel linguaggio dell'analisi matematica imponendo che la funzione f sia continua.

In queste ipotesi, si dimostra che la funzione f viene espressa dalla formula:

(13) $$\alpha' = k \cdot \alpha$$

essendo k un numero reale costante, che viene abitualmente chiamato "costante di proporzionalità".

OSSERVAZIONE 2 - La relazione (12) in Analisi matematica viene abitualmente chiamata "equazione (funzionale) di Darboux" [Jean-Gaston Darboux . 1842-1917]. E' noto che, quando ci si limiti ad imporre ad una funzione f di soddisfare alla (12), la f può non dare luogo ad una proporzionalità tra classi di grandezze: occorre imporre anche che la corrispondenza sia continua e quindi traduca anche la condizione III). Per una discussione sull'argomento si veda [22].

Si può osservare che, nel caso della corrispondenza tra segmenti di due rette che è oggetto del teorema di Talete, il fatto che la condizione III) sia soddisfatta viene accettato come conseguenza delle costruzioni geometriche riguardanti la figura.

* * *

6 - Matematizzazione della realtà.

Nei paragrafi precedenti abbiamo chiarito il concetto della operazione di misura di una grandezza, ed abbiamo messo in evidenza il fatto che questa operazione permette di utilizzare il linguaggio della matematica per rappresentare la realtà materiale, per scrivere le leggi alle quali questa ubbidisce e per dedurre conseguenze dalle osservazioni.

Pertanto, mediante l'operazione di misura, la matematica ci permette di rappresentare con precisione sempre migliorabile la realtà che noi vogliamo conoscere, di prevedere il risultato delle operazioni che noi eseguiamo su di essa, e di rappresentare le leggi alle quali essa obbedisce, sotto forma di relazioni matematiche.

E' opportuno tuttavia osservare qui che queste non sono le sole procedure che ci permettano di rappresentare la realtà e di dedurre conseguenze. Infatti si possono escogitare anche altre convenzioni per la rappresentazione e quindi per l'utilizzazione del linguaggio matematico.

Molte di queste convenzioni sono utilizzate dalla fisica , per descrivere gli stati della materia e per prevedere i fenomeni che accadono. Un caso tipico è offerto dalle scale termometriche. E' noto che noi abbiamo la possibilità di sensazioni termiche; ed è anche noto che, ponendo a contatto due corpi, uno più caldo dell'altro, il più caldo si raffredda ed il meno caldo si riscalda. Questo fenomeno viene spiegato dalla fisica con la esistenza di una forma di energia, che viene chiamata "calore", ed immaginando che esso passi dal corpo più caldo al più freddo, fino a che viene raggiunta una situazione che viene descritta come "equilibrio termico". Come è noto, si stabilisce un insieme di convenzioni per assegnare ad ogni stato termico di un corpo un numero che viene chiamato "temperatura" del corpo stesso. La scala delle temperature è stata scelta di volta in volta con varie convenzioni; ma in ogni caso la scelta è stata fatta in modo che al corpo più caldo sia assegnata una temperatura maggiore di quella del corpo più freddo, e che l'uguaglianza delle temperature di due corpi sia indice del loro equilibrio termico, cioè del fatto che i corpi messi a contatto non si scambiano calore.

Il numero che indica, con certe convenzioni, la temperatura di un corpo non può essere considerato una misura, anche se, nel modo comune di dire, si suol parlare di "misura della temperatura"; infatti le temperature non soddisfano a tutti i postulati che abbiamo enunciato per la definizione implicita del concetto di grandezza, e quindi di misura. Ma l'impiego dei simboli matematici permette di rappresentare con precisione certe osservazioni e di prevedere i fenomeni che avverrano in conseguenza dei nostri comportamenti e delle nostre manipolazioni sui corpi materiali.

La nostra pratica quotidiana conosce moltissimi altri casi nei quali il sistema di simboli costruito dalla matematica permette di rappresentare la realtà e di conoscerla. Un esempio è offerto dalle convenzioni di numerazione dei portoni delle strade. In una città a pianta centrale, la numerazione è assegnata di solito in modo che i numeri siano crescenti dal centro alla periferia della città; inoltre i numeri pari sono assegnati ai portoni che sono a destra di chi percorre la strada andando dal centro alla periferia, ed i dispari a sinistra. La conoscenza di queste convenzioni, e della struttura d'ordine dell'insieme dei numeri naturali, permette di risparmiare tempo e fatica a chi cerca un portone.

Tuttavia questa struttura d'ordine non sempre dà delle informazioni immediatamente intuibili: si pensi, per esempio alle convenzioni usate in astronomia per indicare la luminosità apparente delle stelle: in queste convenzioni, al crescere dei numeri che indicano la "grandezza" della stella corrisponde il diminuire della sua luminosità apparente.

Analoghe convenzioni si hanno nei riguardi di certe notazioni tradizionali per indicare i calibri delle armi da caccia: è noto che si chiama "calibro" di un'arma la misura del diametro interno della canna; ma ancora qualche tempo fa, al numero maggiore corrispondeva il calibro minore: infatti il numero indicava convenzionalmente il numero di proiettili di piombo di quel calibro che occorreva per dare il peso di una libbra; e si capisce che occorrono più proiettili di calibro piccolo per dare lo stesso peso, fornito da un numero minore di proiettili più grandi.

Pertanto si potrebbe dire in generale che l'operazione di misura delle grandezze è soltanto una delle tante procedure che si utilizzano per rappresentare la realtà; in questo ordine di idee quindi la matematica si presenta in generale come un sistema di concetti e di simboli la cui efficacia dipende ovviamente dal sistema di convenzioni che si adottano per applicarlo.

* * *

7 - Unità di misura.

Abbiamo visto che l'operazione di misura di una grandezza richiede che sia scelta e fissata una grandezza omogenea a quella, da considerarsi come unità di misura; quindi, in teoria, è possibile scegliere arbitrariamente una unità per la misura di ogni grandezza che si deve prendere in considerazione, e si deve descrivere ai fini teorici e pratici.

Ciò è avvenuto di fatto in passato: per esempio per le lunghezze sono state stabilite molte unità : pollici, palmi, cubiti, braccia, tese, piedi, yarde, miglia ecc. Cose analoghe sono avvenute per la misura delle aree: sono state scelte, soprattutto per la misura di superficie coltivabili di terreno, molte unità tradizionali: tavole, pertiche, biolche, giornate ecc. Cose analoghe avvengono ancora oggi per le monete.

Il numero e la diversità delle unità scelte mettono in evidenza il fatto che la operazione di misura ha un aspetto convenzionale; tuttavia essa è molto utile anche per la comunicazione delle conoscenze, perchè permette - come è stato detto ripetutamente - di rappresentare con precisione la realtà con i simboli del linguaggio matematico. Ma la molteplicità di unità di misura rende difficile la comunicazione e scomodi i calcoli; pertanto la ricerca di comunicazioni facili e chiare, e di calcoli semplici ha portato progressivamente ad unificare le scelte delle unità di misura delle grandezze utilizzate nella pratica e nella scienza.

Questa unificazione ha assunto due aspetti, che ora prenderemo in considerazione; un primo aspetto è quello che ha portato gli Stati a convenire su scelte comuni di unità di misura. Si potrebbe dire che il primo passo in questa direzione è stato fatto alla fine del XVIII secolo, quando gli astronomi francesi scelsero una unità di misura delle lunghezze legata alle dimensioni della Terra, definendo il metro come la decimilionesima parte della lunghezza del quarto di meridiano terrestre. Il processo di unificazione si estese a varie nazioni, e venne applicato alle grandezze della scienza e della tecnica, con successive convenzioni internazionali; tuttavia si potrebbe dire che esso non è ancora terminato completamente, perché il peso delle abitudini e delle tradizioni è molto grande presso tutti i popoli.

Un secondo aspetto della unificazione ha condotto a collegare tra loro le unità di misura delle varie grandezze, fondando le scelte sulle conoscenze dei teoremi di geometria o sulle leggi della fisica.

Si è giunti così alla scelta di certe grandezze che vengono convenzionalmente considerate come "fondamentali", ed altre che vengono considerate come "derivate". Anche la scelta delle grandezze fondamentali è libera, ed è dettata dalle maggiori o minori possibilità di determinare dei campioni delle unità facilmente riproducibili, e determinabili con la massima precisione possibile dalle tecniche di cui oggi disponiamo. Così per esempio l'unità di misura delle lunghezze oggi è stata collegata convenzionalmente alla lunghezza d'onda della luce emessa dall'atomo di un ben determinato elemento chimico.

Nell'ambito della geometria le unità di misura delle aree e dei volumi sono state collegate convenzionalmente con l'unità di misura delle lunghezze. Così, come è ben noto, si sceglie come unità di misura delle aree l'area del quadrato che ha come lato il segmento scelto come unità di misura delle lunghezze; e come unità di misura dei volumi si sceglie il volume del cubo che ha come lato il segmento scelto come unità di misura delle lunghezze. Questa scelta non è per nulla obbligata, ma, quando venga accettata, rende spediti e semplici i calcoli relativi alle grandezze geometriche: infatti in geometria euclidea si dimostra che le aree di due rettangoli che hanno un lato in comune sono proporzionali all'altro lato: e che le aree di due figure simili hanno come rapporto quello delle aree dei quadrati aventi come lati due segmenti che stanno tra loro nel rapporto di similitudine.

Questi teoremi valgono in geometria euclidea, ma non in geometria non euclidea, nella quale non esistono figure simili che non siano uguali tra loro. Ma in geometria euclidea queste scelte delle unità di misura delle aree e dei volumi permettono di calcolare la misura dell'area di un rettangolo (scegliendo l'unità di misura delle aree nel modo detto) semplicemente eseguendo il prodotto delle misure dei lati.

In modo analogo si giustificano le note formule elementari per il calcolo delle misure delle aree e dei volumi di certe figure elementari, formule che vengono riportate abitualmente dai manuali.

* * *

8 - Grandezze fondamentali e grandezze derivate.

Il concetto di proporzionalità fra classi di grandezze è utilizzato quotidianamente in fisica, per descrivere la realtà della materia e dei fenomeni energetici di cui abbiamo esperienza, e per rappresentare matematicamente le leggi che li regolano.

Per esempio, considerando un punto materiale che descrive una retta con moto uniforme, indicando con s la misura della lunghezza del segmento percorso durante una durata misurata con t, sussiste la relazione:

$$s = v \cdot t, \tag{14}$$

che esprime la proporzionalità tra la lunghezza del percorso e la durata del moto attraverso le loro misure.

Si osservi che, in questo caso, le due grandezze, lunghezza e durata, non sono omogenee tra loro; la costante di proporzionalità che figura nella (14) viene interpretata come la misura di una terza grandezza, che non è omogenea con nessuna delle due, e che viene chiamata "velocità del moto uniforme del punto", o anche semplicemente "velocità del punto".

In modo analogo, considerando un conduttore filiforme ed omogeneo di elettricità, indicata con V la misura della forza elettromotrice esistente tra i suoi estremi, e con i la misura dell'intensità della corrente che lo percorre, sussiste la relazione:

$$V = R \cdot i; \tag{15}$$

anche in questo caso le due grandezze non sono omogenee tra loro e la costante di proporzionalità che figura nella (15) viene interpretata come misura di una terza grandezza, che non è omogenea con nessuna delle precedenti, e che viene chiamata "resistenza (elettrica)" del conduttore.

Ancora, considerando una certa merce che viene venduta "a peso", il costo complessivo di una partita di merce, espresso in una moneta determinata, per esempio in lire italiane, è proporzionale al peso complessivo della stessa espresso per esempio in kg; la costante di proporzionalità è interpretata come la misura di una terza grandezza, che non è omogenea con nessuna delle precedenti, e che viene chiamata "prezzo" della merce.

I legami tra le coppie di classi di grandezze ora considerate (lunghezza e durata del moto uniforme, forza elettromotrice ed intensità di corrente, peso e costo complessivo) esprimono delle leggi fisiche, o delle consuetudini della pratica commerciale quotidiana. Tali leggi vengono rappresentate in forma matematica dalle formule (14), (15) e moltissime altre analoghe. Quando si scelgano opportunamente le unità di misura delle grandezze che figurano come costanti di proporzionalità tra classi di grandezze, i numeri che compaiono nelle leggi danno le misure delle grandezze stesse; altrimenti forniscono soltanto dei numeri proporzionali alle misure stesse.

Così per esempio, se nella (14) il numero s indica la misura in metri della lunghezza del segmento percorso dal punto, ed il numero t indica la misura in secondi della durata del moto, il numero v indica la velocità del moto stesso in m/sec (metri al secondo); è chiaro che il numero stesso non misura la velocità in km/h (chilometri all'ora); questa misura tuttavia risulta proporzionale a quella data prima, secondo una costante che dipende dalle costanti di proporzionalità che legano le diverse unità di misura, di lunghezza e di durata.

* * *

9 - Proporzionalità inversa.

La corrispondenza tra due classi di grandezze G e G' che abbiamo presentato nel paragrafo 5 viene spesso designata, in forma più precisa, "proporzionalità diretta". Spesso infatti viene studiata anche una corrispponda che viene chiamata "proporzionalità inversa". Per precisare questo concetto indichiamo con A e B due grandezze qualisivogliano di G, diverse dalla grandezza nulla, ed indichiamo con σ il loro rapporto; si abbia quindi:

(16) $$A = \sigma \cdot B;$$

indicate con A' e B' le grandezze di G' che corrispondono ad A e B, se la corrispondenza è una proporzionalità inversa si ha in ogni caso:

(17) $$A' = (1/\sigma) \cdot B'.$$

Il concetto di proporzionalità inversa viene spesso utilizzato in geometria e sopratutto in fisica, per esprimere un legame esistente tra classi di grandezze. Consideriamo per esempio il caso del moto rettilineo uniforme, considerato nel precedente paragrafo 8, e descritto con la equazione (14). Questa equazione viene spesso scritta nella forma:

(18) $$v = s/t;$$

ed il suo significato viene presentato in parole dicendo che, una volta che sia fissato il segmento di retta percorso dal punto, la velocità del moto rettilineo uniforme è inversamente proporzionale alla durata del moto.

Pertanto, nel caso della (18), le due classi di grandezze che si considerano sono quella delle durate e quella delle velocità; la misura della lunghezza del percorso è considerata come una costante .

Anche in questo caso, la scelta opportuna delle unità di misura delle grandezze considerate permette di semplificare i calcoli relativi ai numeri che esprimono le misure corrispondenti.

OSSERVAZIONE 3 - Nella presente trattazione abbiamo dato senso ai concetti di somma tra grandezze omogenee, rapporto tra due grandezze omogenee, prodotto di un numero ed una grandezza. Non abbiamo dato senso ai concetti di prodotto di grandezze, omogenee oppure no, nè al rapporto di due grandezze non omogenee. Ricordiamo qui che questa posizione non è adottata da tutti gli autori che si occupano di questo argomento. Ritorneremo su di esso nel prossimo capitolo.

* * *

10 - Le convenzioni internazionali.

Abbiamo parlato delle convenzioni internazionali che sono oggi adottate per indicare le grandezze della tecnica e della scienza. Tali convenzioni riguardano la scelta delle grandezze che si assumono come fondamentali, la loro campionatura, e i loro nomi; inoltre vi sono delle convenzioni per la definizione delle grandezze derivate e per i loro nomi.

Tali convenzioni riguardano anche le notazioni per i simboli che indicano le grandezze; infatti diverse tra queste hanno dei nomi che suonano come quelli di grandi scienziati. Tuttavia le parole corrispondenti debbono essere considerate esclusivamente come nomi delle grandezze.

Queste convenzioni hanno delle conseguenze anche per le regole riguardanti i simboli delle grandezze; questi debbono essere trattati come le lettere delle espressioni letterali algebriche. Pertanto il simbolo della intensità di corrente elettrica, il cui nome è preso da quello del grande fisico matematico J.M.Ampère è la lettera maiuscola A , che deve essere scritta non accompagnata dal punto, perchè, in quanto simbolo, non deve essere considerata come abbreviazione del nome del grande fisico,

Analogamente il simbolo "m" del metro, che è unità di misura delle lunghezze, non deve essere scritto col puntino, o peggio, come capita spesso di vedere, nella forma "mt.".

Infine la indicazione numerica di una grandezza deve essere scritta ponendo il numero prima del simbolo della grandezza considerata, con la sola eccezione dei simboli delle monete, che vanno scritti prima del numero corrispondente.

A queste convenzioni vanno aggiunte anche quelle che riguardano i calcoli con numeri che indicano grandezze. Così per esempio si deve scrivere:

$$3m \cdot 2m = 6m^2.$$

Con il rispetto di queste convenzioni le comunicazioni ed i calcoli acquisano chiarezza, precisione e comodità.

* * *

VI - CENNI SU ALTRI ATTEGGIAMENTI POSSIBILI PER LA TRATTAZIONE DEL CONCETTO DI GRANDEZZA.

1 - Assiomi di Peano-Cassina.

Abbiamo ripetutamente affermato che la strada da noi scelta per la trattazione coerente e rigorosa del concetto di grandezza non è la sola possibile. Infatti nella costruzione di una teoria matematica che riguardi la realtà, i punti di partenza possono essere scelti con una certa libertà, perché sono dettati dal gusto e dalla cultura del trattatista, e dai fini che egli intende raggiungere: c'è infatti chi mira a costruire una teoria con il minimo numero possibile di concetti primitivi, da definirsi con postulati, e con il minimo numero di proposizioni, da enunciarsi senza dimostrazione.

In questo senso è da intendersi l'affermazione di U. Cassina, il quale dice che la scelta degli enti primitivi e dei postulati è un "atto di imperio del trattatista" [5].

C'è invece chi cerca di scegliere dei concetti primitivi e dei postulati che siano il più possibile vicini all'esperienza comune, in modo da costruire una trattazione che sia rigorosa ma che si discosti il meno possibile dal modo di procedere elementare e sbrigativo di chi deve applicare la teoria nella pratica quotidiana della vita comune e della tecnica.

In questo ordine di idee noi abbiamo scelto di presentare con postulati anzitutto il concetto di grandezza, ed in seguito i numeri razionali ed i numeri reali come operatori su una realtà che è già conosciuta e che idealizza quella realtà materiale che è oggetto delle nostre manipolazioni quotidiane.

Con questa procedura quindi abbiamo cercato di costruire una matematizzazione della realtà, cioè di costruire un insieme di concetti e di simboli che potessero rappresentare con precisione la realtà stessa, e permettere le deduzioni rigorose dalle ipotesi che si enunciano.

Il sistema di assiomi da noi qui presentato è ispirato a quello formulato da Burali Forti [4], e ne costituisce in certo senso uno sviluppo, con qualche modifica. Tuttavia, ripetiamo, la strada da noi seguita non è la sola possibile; pertanto esporremo qui le idee fondamentali sulle quali altri Autori costruiscono una teoria rigorosa delle grandezze, percorrendo ovviamente una strada diversa da quella da noi percorsa, e cioè scegliendo diversi punti di partenza ed enunciando proposizioni primitive ovviamente diverse dalle nostre.

Precisamente presenteremo qui la teoria delle grandezze costruita ed esposta da U. Cassina, sulla scorta delle idee di G. Peano [5].

In questa impostazione si presuppone di aver sviluppato in modo completo e rigoroso la teoria dei numeri reali, ovviamente seguendo una strada che non fa menzione in alcun modo del concetto di grandezza.

Questo viene definito implicitamente con cinque postulati indipendenti, che permettono di sviluppare in seguito completamente la teoria. Tali postulati definiscono implicitamente una operazione che viene chiamata "prodotto (o anche moltiplicazione) di un numero reale per una grandezza".

AVVERTENZA - D'ora innanzi, fino ad esplicito avviso contrario, con le lettere minuscole dell'alfabeto latino (come x, y, z, t, ...a, b, c...ecc.) indicheremo dei numeri reali assoluti; invece con lettere maiuscole dell'alfabeto latino (come A, B, C, ecc.) indicheremo delle grandezze. Il prodotto di un numero reale per una grandezza, definito implicitamente con i postulati che enunceremmo subito, verrà indicato interponendo un punto tra il simbolo del numero e quello della grandezza considerata: per esempio il prodotto del numero reale x per la grandezza A sarà indicato con il simbolo: $x \cdot A$.

Per definire implicitamente il concetto di grandezza ed il prodotto di una grandezza per un numero reale vengono enunciati i seguenti postulati:

I) Il prodotto di un numero reale (assoluto) x per una grandezza A è una grandezza, che sarà indicata con il simbolo:

$$x \cdot A. \tag{1}$$

In particolare si definisce "grandezza nulla" e si indica con il simbolo O la grandezza che si ottiene da una grandezza qualunque moltiplicandola per il numero zero; si avrà quindi:

$$O = 0 \cdot A. \tag{2}$$

II) Esistono delle grandezze diverse dalla grandezza nulla.

III) Il prodotto del numero 1 per una grandezza qualunque A è uguale alla grandezza stessa; si avrà quindi:

$$A = 1 \cdot A. \tag{3}$$

IV) Se un numero, moltiplicato per una grandezza, la lascia invariata, esso è il numero 1. Si avrà quindi:

$$x \cdot A = A \quad ==> \quad x = 1. \tag{4}$$

V) Vale la relazione:

$$x \cdot (y \cdot A) = (x \cdot y) \cdot A. \tag{5}$$

* * *

2 - Conseguenze sviluppi.

Sulla base di questi postulati si definisce il concetto di "Classe di grandezze omogenee", dando questo nome all'insieme di tutte le grandezze che si ottengono da una di esse moltiplicandola per un numero reale. Il Post. V permette di dimostrare che l'insieme che si ottiene in questo modo non dipende dalla grandezza scelta; quindi tutta la classe di grandezze omogenee si ottiene moltiplicando una qualunque di esse per tutti i numeri reali.

Partendo da qui si definisce il rapporto tra due grandezze omogenee A e B come quel numero reale che, moltiplicato per B, dà la grandezza A. Si pone quindi, per definizione:

(6) $$x = A/B,$$

quando si abbia:

(7) $$A = x \cdot B.$$

Il Post. IV permette di dimostrare che il numero reale x, definito dalla (7), è unico.

Il numero x, che entra nella (7) può essere chiamato "misura" della grandezza A nella unità B. Qualora si considerasse fissata una volta per tutte la grandezza B, unità di misura, ogni grandezza: A, A', A" ecc. corrisponderebbe biunivocamente alla propria misura, rispettivamente x, x',x" ecc. ed il rapporto tra due grandezze sarebbe dato dal numero reale che è il rapporto tra le misure corrispondenti.

OSSERVAZIONE 1 - Abbiamo detto esplicitamente che, quando si voglia impostare in questo modo la teoria delle grandezze, occorre avere prima sviluppato tutta la teoria dei numeri reali, senza alcun riferimento al concetto di grandezza. Abbiamo anche osservato che questa strada è diversa da quella da noi percorsa, pur giungendo agli stessi risultati.

Per dare un'idea della diversità dei procedimenti qui esposti dai nostri, ricordiamo che noi abbiamo definito implicitamente la somma di due grandezze omogenee, attraverso certi postulati (Cfr. gli sviluppi del Cap. II); su questa base abbiamo costruito la teoria dei razionali, come operatori sulle grandezze (supposte già note), ed abbiamo definito le operazioni sui razionali. In particolare per esempio la somma di due razionali m/n e p/q è stata definita nel modo seguente:

(8) $$[m/n + p/q] \cdot A = (m/n) \cdot A + (p/q) \cdot A.$$

Si osservi che, secondo la nostra impostazione, in questa relazione il secondo membro è da intendersi come noto, perché indica la somma di due grandezze, che è stata già definita; ciò permette quindi di definire il significato del primo membro, che contiene una espressione, e precisamente quella che figura tra parentesi quadre [], il cui significato è finora incognito, e viene appunto definito dalla (8).

Invece, secondo l'impostazione che stiamo esponendo in questo capitolo, nella (8) il significato del primo membro è da intendersi come noto: si tratta infatti del prodotto della grandezza A per un numero reale, il quale è stato ottenuto dalla somma di due numeri cosiffatti; somma che si conosce, perchè (ripetiamo) tutta la teoria dei numeri reali è supposta conosciuta. Quindi la (8) è da considerarsi come definitoria del significato del secondo membro, il quale contiene la indicazione di una operazione prima incognita, e cioè la somma di due grandezze.

OSSERVAZIONE 2 - La relazione (8) è un caso particolare della

(9) $$(x+y) \cdot A = x \cdot A + y \cdot A$$

nella quale x ed y sono due numeri reali. Questa relazione stabilisce un isomorfismo tra l'operazione di somma sulle grandezze e quella di somma tra i numeri che sono le loro misure in una unità qualunque. Si ottiene così una rappresentazione delle grandezze di un insieme di grandezze omogenee sull'insieme dei reali assoluti, rappresentazione che fa corrispondere biunivocamente ad ogni grandezza un numero ed alla operazione di somma tra grandezze quella di somma tra i numeri che le rappresentano con queste convenzioni. Si ottiene quindi così una rappresentazione della realtà con i simboli della matematica, rappresentazione che permette di prevedere il risultato delle operazioni che si eseguono sulle grandezze semplicemente operando sui simboli con regole note e ben stabilite.

E' questo il fondamento ed il punto di partenza per quella operazione che qualche Autore chiama di "matematizzazione della realtà". Espressione alla quale si potrebbe dare come significato appunto il contenuto della osservazione presente.

OSSERVAZIONE 3 - La teoria che stiamo esponendo non precisa quali siano le eventuali procedure concrete che si possono seguire per eseguire il prodotto di un numero reale per una grandezza: per esempio non si precisa quale sia la procedura concreta per determinare la lunghezza y di una circonferenza quando sia data la lunghezza x del suo diametro, essendo le due grandezze legate dalla nota relazione:

(10) $$y = \pi \cdot x;$$

infatti il numero π è irrazionale, e pertanto non può essere rappresentato in forma finita. Ovviamente, in casi come questo, il segmento di lunghezza y non può essere determinato con precisione assoluta mediante le procedure finite, e gli strumenti abituali della geometria elementare; ne consegue che con questi strumenti si possono rappresentare e costruire soltanto dei segmenti che approssimano il segmento voluto con un errore che può essere reso minore di ogni segmento stabilito.

* * *

3 - Osservazioni comparative.

La nostra impostazione della teoria delle grandezze ci ha permesso di trattare i concetti di somma di due grandezze omogenee, di prodotto di una grandezza per un numero reale, di rapporto tra due grandezze omogenee; abbiamo esplicitamente evitato di introdurre il concetto di prodotto di due grandezze e di rapporto tra due grandezze non omogenee. Tuttavia questo nostro atteggiamento non è condiviso da tutti gli Autori che si sono occupati di questi argomenti. Per esempio Giuseppe Peano (Cfr. [20] e [21]) accetta la validità di una espressione come la seguente: "l'area di un rettangolo è il prodotto dei due lati".

Ovviamente la validità di queste trattazioni dipende dal senso che si vuole dare al termine "grandezza" e quindi dal sistema di postulati che ne danno la definizione implicita. Osserviamo tuttavia che lo stesso Peano interpreta le relazioni quantitative tra le grandezze come relazioni tra i numeri che le rappresentano rispetto ad un dato sistema di unità di misura fissate. Ricordiamo che la discussione in proposito non è nuova, e risale alle origini della meccanica razionale scientifica, quale oggi la conosciamo, cioè risale al secolo XVII e addirittura alla geometria greca {si vedano in proposito le notizie storiche date in [13] }.

Per es. indicando con s la lunghezza del percorso di un punto in moto rettilineo ed uniforme, con v la sua velocità, con t la durata del moto, si è discusso se la legge fondamentale del moto uniforme:

$$s = v \cdot t, \tag{11}$$

sia da intendersi come un legame fra tre grandezze già note per altra via, e misurate con procedure indipendenti tra loro, oppure come la definizione della grandezza "velocità" {Si veda per es. [13]}.

Analogamente, in geometria, indicando con A l'area di un quadrato e con L la lunghezza del suo lato, ci si può domandare se la relazione:

$$A = L^2 \tag{12}$$

possa avere un senso, e precisamente costituire la definizione dell'area stessa.

Recenti trattazioni [10] hanno imboccato la strada già battuta da Peano, ed hanno presentato la teoria delle grandezze utilizzando le strutture formali e la nomenclatura dell'algebra astratta più recente.

Noi preferiamo la prima delle due impostazioni ora ricordate; quindi, per esempio, preferiamo interpretare la (12) come una relazione tra le misure delle due grandezze: lunghezza ed area. Precisamente preferiamo considerare le due grandezze come definite , ciascuna con una propria procedura, indipendentemente dall'altra, e quindi preferiamo interpretare la (12) come esprimente il teorema di geometria elementare, il quale dimostra che le aree di due rettangoli che hanno un lato in comune stanno tra loro come i restanti lati; di conseguenza la (12) è da intendersi come un legame tra i numeri che esprimono le misure delle grandezze considerate, quando si scelgano in modo opportuno le unità di misura: precisamente quando si scelga come unità di misura della grandezza "area" l'area del quadrato che ha come lato il segmento scelto come unità di misura dei segmenti.

Ovviamente questa scelta di unità di misura non è obbligatoria, ed è invece dettata soltanto da considerazioni di opportunità, e di comodità dei calcoli numerici. Prova di questo fatto è la difficoltà di stabilire una unificazione delle unità di misura delle grandezze della fisica e della geometria; difficoltà che - ripetiamo - ha dato luogo a trattative internazionali faticose e lunghe.

INDICE

INTRODUZIONE

Cap. I - GENERALITA'. PROBLEMI LOGICI E DIDATTICI.
1 - La matematica chiave di lettura della realtà.
2 - Il linguaggio della matematica.
3 - Dai numeri naturali ai razionali.
4 - Il concetto di "grandezza".
5 - Il problema logico della definizione.

Cap. II - ASSIOMATICA ELEMENTARE DEL CONCETTO DI GRANDEZZA.
1 - La relazione di equivalenza.
2 - L'operazione di somma e le sue proprietà.
3 - Grandezze assolute e divisibili.
4 - Ordinamento nell'insieme di grandezze omogenee.
5 - Differenza tra due grandezze.
6 - La continuità.
7 - Il multiplo di una grandezza secondo un numero naturale.
8 - Esistenza di grandezze comunque piccole.
9 - La proposizione di Archimede.
10 - Questioni critiche.

Cap. III - I NUMERI RAZIONALI.
1 - Sottomultiplo di una grandezza secondo un numero naturale.
2 - Le frazioni ed i numeri razionali.
3 - Prodotto di due numeri razionali.
4 - Somma di due numeri razionali.
5 - Il razionale come rapporto tra due grandezze.

Cap. IV - I NUMERI REALI ASSOLUTI.
1 - Coppie di grandezze incommensurabili.
2 - Il numero reale assoluto.
3 - Ordinamento ed operazioni nell'insieme dei reali.
4 - I calcolo con il sistema decimale.

Cap. V - MISURE E PROPORZIONALITA'.
1 - Numero reale come rapporto tra grandezze.
2 - La proporzione.
3 - La teoria classica delle proporzioni.
4 - La misura.
5 - Proporzionalità tra classi di grandezze.
6 - Matematizzazione della realtà.
7 - Unità di misura.
8 - Grandezze fondamentali e grandezze derivate.
9 - Proporzionalità inversa.

BIBLIOGRAFIA.

[1] AMALDI Ugo - Sulla teoria dell'equivalenza. In : F. Enriques - Questioni riguardanti le matematiche elementari, Art.VII,Vol.II, Zanichelli, Bologna, 1925.

[2] BETTAZZI Rodolfo - Teoria delle grandezze. Spoerri, Pisa, 1890.

[3] BRUSOTTI Luigi, GIGLI Duilio - Teoria della misura. In: L. Berzolari, G. Vivanti, D. Gigli - Enciclopedia delle matematiche elementari, Vol.II, Parte I, Hoepli, Milano, 1937.

[4] BURALI FORTI Cesare - Logica matematica. Ed.II, Hoepli, Milano, 1919.

[5] CASSINA ugo - Nuova teoria delle grandezze. Atti Acc. delle Scienze di Torino, Vol.68, 1928.

[6] CASSINA Ugo - Su l'equivalenza fra figure geometriche e le nozioni di volume, area e lunghezza. In: Critica dei principi della matematica e questioni di logica, cap.3, Cremonese, Roma, 1961.

[7] CASSINA Ugo - Sulla teoria delle grandezze e dell'equivalenza. In : Critica dei principi della matematica e questioni di logica, Cap.4, Cremonese, Roma, 1961.

[8] CATANIA Sebastiano - Sulle condizioni che caratterizzano una classe di grandezze. Atti Acc. delle Scienze di Torino, Vol. 51, 1915-16. {Citato da Burali Forti - Logica, Pag. 382/3}.

[9] CATANIA Sebastiano - Grandezze e numeri. Giannotta, Catania, 1915. {Citato ibidem}.

[10] DARBO Gabriele - Una teoria delle Grandezze». Archimede, Firenze, gen-apr 1969.

[11] EUCLIDE - Gli Elementi di Euclide a cura di Attilio Frajese e Lamberto Maccioni. UTET, Torino, 1970.

[12] HILBERT David - Grundlagen der Geometrie. Trad. it. di Pietro Canetta col titolo: Fondamenti della geometria, Feltrinelli, Milano, 1970.

[13] MACH Ernst - Die Mechanik in ihrer Entwickelung historisch-kritisch dargestellt. Trad. it. di Dionisio Gambioli col titolo: I principi della Meccanica esposti criticamente e storicamente nel loro sviluppo da Ernesto Mach, Roma, 1908.

[14] MANARA Carlo Felice - Un teorema di Beppo Levi riguardante la logica formale. Periodico di matematiche, Serie 4, Vol. 43, 1965.

[15] MANARA Carlo Felice - Grandezze e misure. Esperienze e proposte di didattica matematica, N.6, N.7. Didattica delle scienze, Brescia, N.72 (nov. 1977), N.73 (gen. 1978).

[16] MANARA Carlo Felice - Grandezze e misure. Problemi logici e didattici. In: Per un curricolo continuo di educazione matematica nella scuola dello obbligo, Cap. 6, Quaderni IRRSAE Lombardia, N.13, Milano, 1982.

[17] PALAZZI Ferdinando - Novissimo dizionario della lingua italiana. Ceschina, Milano, 1954.

[18] PASCAL Blaise - De l'esprit géométrique. In: Pensées et opuscules, Léon Brunschvigc, Paris, 1976.

[19] PEANO Giuseppe - Arithmetices principia nova methodo exposita. Bocca, Torino, 1889.

[20] PEANO Giuseppe - Area de rectangulo. Rassegna di matematica e fisica. Vol.I, Roma, 1921. Opere scelte, Vol.III, N.194.
[21] PEANO Giuseppe - Operazioni sulle grandezze. Atti Acc. delle Scienze di Torino, Vol. 57, 1921-22. Opere scelte, Vol.III, N.197.
[22] VITALI Giuseppe - Sulle applicazioni del postulato della continuità nella Geometria elementare. In: Federigo Enriques - Questioni riguardanti le matematiche elementari, Art.V, Vol.I, Zanichelli, Bologna, 1928.